

DER STAHLBAU

CHRIFTFÜHRUNG: PROF. DR.-ING. DR.-ING. E.H. KLOPPPEL · DARMSTADT
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN BERLIN-WILMERSDORF

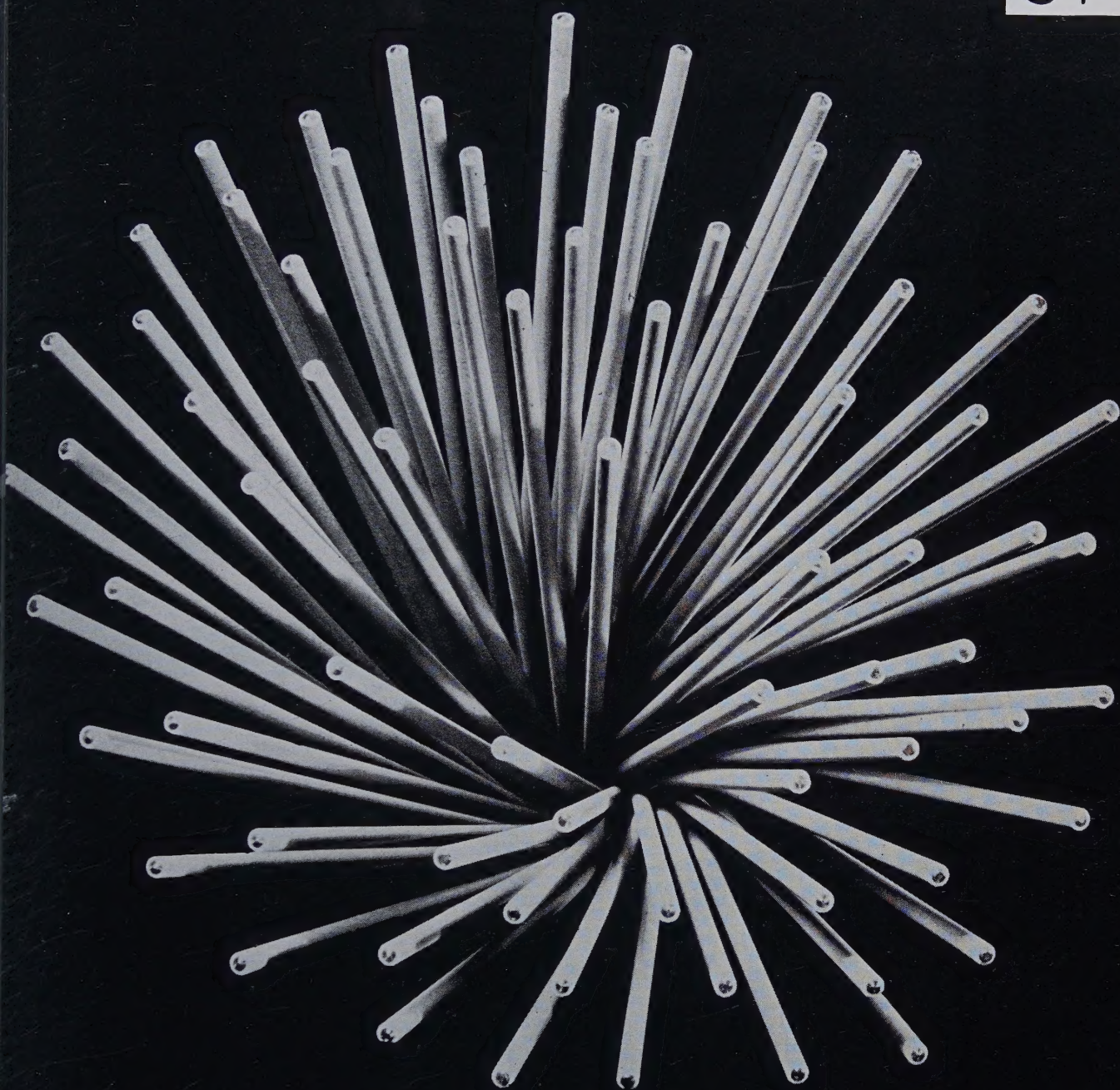
Heft 2 — Februar 1960 A 6449 E



wo immer so ein
Bauschild steht

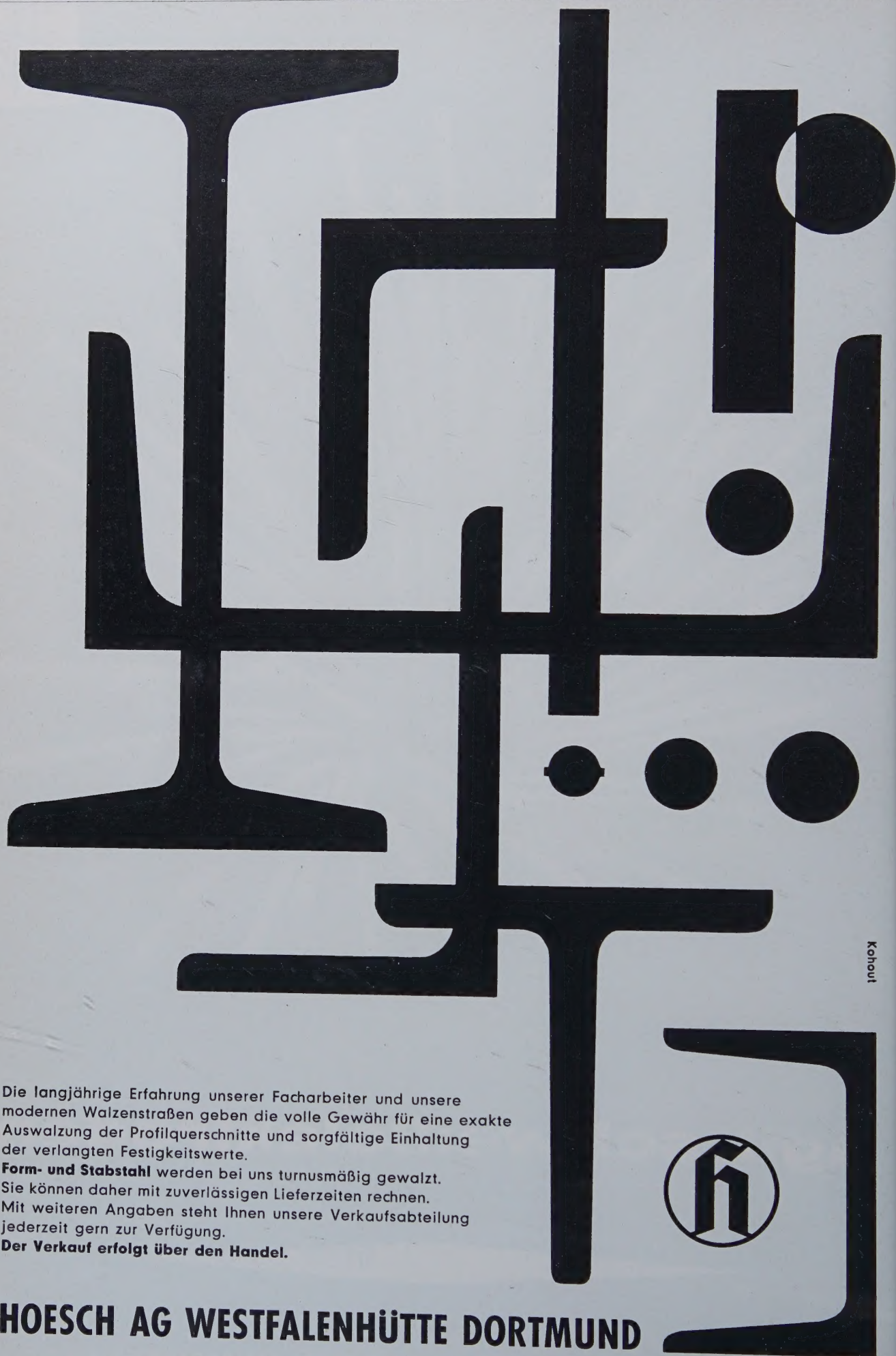
war der Bauherr gut beraten — — —

Agil



agil schweißelektroden

AGIL SCHWEISSDRAHT DR. VAAS GMBH · DORTMUND · SPRINGORUMSTRASSE 140



Kohout

Die langjährige Erfahrung unserer Facharbeiter und unsere modernen Walzenstraßen geben die volle Gewähr für eine exakte Auswalzung der Profilquerschnitte und sorgfältige Einhaltung der verlangten Festigkeitswerte.

Form- und Stabstahl werden bei uns turnusmäßig gewalzt. Sie können daher mit zuverlässigen Lieferzeiten rechnen. Mit weiteren Angaben steht Ihnen unsere Verkaufsabteilung jederzeit gern zur Verfügung.

Der Verkauf erfolgt über den Handel.



HOESCH AG WESTFALENHÜTTE DORTMUND

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Kurt Klöppel,
Darmstadt, Technische Hochschule

Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin-Wilmersdorf,
Hohenzollerndamm 169, Ruf: 87 15 56

P. Jahrgang

Berlin, Februar 1960

Heft 2

STAHLBAU

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Kurt Klöppel,
Darmstadt, Technische Hochschule
Darmstadt 85 26 39

Februar 1960

Heft 2

Inhalt

Seite

Klöppel, K., Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h., Darmstadt und Schardt, R., Dipl.-Ing., Darmstadt: Systematische Ableitung der Differentialgleichungen für ebene anisotrope Flächentragwerke	33
Vitt, H. P., Dr.-Ing., Dortmund und Winken, W., Ober- ing., Duisburg/Hamborn: Die Stahlkonstruktion für das SM-Stahlwerk I der August-Thyssen-Hütte . . .	43
iencke, Ernst, Dr.-Ing., Darmstadt: Die Berechnung von Hohlrippenplatten (Schluß aus Heft 1/1960)	47
berndorfer, Karl, Dipl.-Ing. Dr. techn., Linz/Donau: Gerüstlose Auswechslung der Füllstäbe stählerner Fachwerkbrücken	59
Verschiedenes:	
omke, K., Dipl.-Ing., Düsseldorf: Aluminiumdach- konstruktion für das Empfangsgebäude des Brüsseler Flughafens	60
latte, Franz, Dipl.-Ing., Gustavsborg: Die Olympia- Sporthalle in Squaw-Valley	63
ochschulnachrichten	64
Persönliches	
Professor Wilhelm Härter 80 Jahre	64
ücherschau	64

Bezugsbedingungen

vierteljährlich 7,50 DM (Ausland nur ganzjährlich 30,— DM), Einzelheft
— DM und Zustellgeld. Monatlich ein Heft, Bezugspreis im voraus zahl-
bar. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung und jede Postanstalt oder
der Verlag entgegen. Postscheckkonto: Berlin-West 16 88. Abbestellungen
einen Monat vor Schluß des Kalendervierteljahres.

Bestellungen für das Ausland sind zu richten

für Österreich an Rudolf Lechner & Sohn, Wien I/1, Seilerstätte 5,

für die Schweiz an Verlag für Wissenschaft, Technik und Industrie AG.,
Basel, Schützenmattstraße 43,

für Italien an Libreria Commissionaria Sansoni, Firenze, Via Gino
Capponi 26,

für das gesamte übrige Ausland und Übersee an I. R. Maxwell & Co. Ltd.,
London W 1, 4/5 Fitzroy Square.

Die Differentialgleichungen der Flächentragwerke

R. Schardt, Darmstadt

— 624.073

dazu die Spannzahlen ν_i^k benutzen

$$\mathfrak{f} = N \cdot \mathfrak{N} \cdot \mathfrak{v} \quad (2)$$

oder ausführlich geschrieben

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \nu_1^1 & \nu_1^2 & \dots & \nu_1^n \\ \nu_2^1 & \nu_2^2 & \dots & \nu_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_n^1 & \nu_n^2 & \dots & \nu_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

und

$$s_i = N (\nu_i^1 \cdot v_1 + \nu_i^2 \cdot v_2 + \dots + \nu_i^n \cdot v_n) \quad (2a)$$

Durch Gleichsetzen von (1) und (2) erhält man \mathfrak{N} als Kehrmatrix
von \mathfrak{N}

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^{-1} \quad (3)$$

Die Matrix \mathfrak{N} entspricht mechanisch der bekannten δ_{ik} -Matrix,
die man beim Kraftgrößenverfahren für statisch unbestimmte
stabförmige Tragwerke erhält, während \mathfrak{N} der Ostenfeld'schen
Matrix für die Zwangskräfte Z_i^k beim Formänderungsgrößenver-
fahren entspricht.

In einem räumlichen anisotropen Medium wird $n = 6$. Der Be-
anspruchungszustand \mathfrak{f} enthält 3 Normal- und 3 Schubspannungen,
der Verformungszustand \mathfrak{v} enthält 3 Dehnungen und 3 Schiebungen.
Wir erhalten also 36 Verformungs- und 36 Spannzahlen. Mit den
getroffenen Voraussetzungen (Hooke'sches Gesetz und kleine Ver-
formungen) werden die beiden Matrizen \mathfrak{N} und \mathfrak{N} symmetrisch, d. h.

$$\left. \begin{aligned} \mu_i^k &= \mu_k^i \\ \nu_i^k &= \nu_k^i \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

und wir erhalten die 21 voneinander unabhängigen Elastizitäts-
zahlen für vollkommen anisotrope Medien, wie sie z. B. der Ein-
kristall darstellt [1], [2].

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \nu_x^x & \nu_x^y & \nu_x^z & \nu_x^{xy} & \nu_x^{yz} & \nu_x^{zx} \\ \nu_y^x & \nu_y^y & \nu_y^z & \nu_y^{xy} & \nu_y^{yz} & \nu_y^{zx} \\ \nu_z^x & \nu_z^y & \nu_z^z & \nu_z^{xy} & \nu_z^{yz} & \nu_z^{zx} \\ \nu_{xy}^x & \nu_{xy}^y & \nu_{xy}^z & \nu_{xy}^{xy} & \nu_{xy}^{yz} & \nu_{xy}^{zx} \\ \nu_{yz}^x & \nu_{yz}^y & \nu_{yz}^z & \nu_{yz}^{xy} & \nu_{yz}^{yz} & \nu_{yz}^{zx} \\ \nu_{zx}^x & \nu_{zx}^y & \nu_{zx}^z & \nu_{zx}^{xy} & \nu_{zx}^{yz} & \nu_{zx}^{zx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

z. B. bedeutet ν_{xy}^x die $\frac{1}{N}$ -fache Schubspannung τ_{xy} infolge $\varepsilon_x = 1$.

Wenn im Falle orthogonaler Anisotropie die ausgezeichneten
Richtungen mit den Koordinatenrichtungen zusammenfallen, wer-
den die Verformungszahlen mit 3 Zeigern zu Null und von denen
mit 4 Zeigern behalten nur die auf der Hauptdiagonalen einen
Wert. Es bleiben dann 9 übrig.

Im Falle vollkommener Isotropie ergeben sich die bekannten
Elastizitätsbeziehungen

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{pmatrix} 1 & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

Es bleiben also nur zwei Elastizitätszahlen übrig: der Elastizitätsmodul E und die Poissonsche Konstante μ , die sogenannte Querdehnungszahl. Vollkommen isotropes Material ist z. B. Glas. Die Metalle haben Kristallstruktur; jedoch sind die sehr kleinen Kristalle statistisch so regellos verteilt, daß für ihre Gesamtwirkung keine ausgezeichneten Richtungen in Erscheinung treten (Quasiisotropie).

3. Scheiben und Netze

3.1 Allgemeine Ableitung der Differentialgleichungen mit Hilfe der Verformungszahlen \mathfrak{M}

Als Schnittgrößen sind hier die Spannungsresultanten n_x, n_y, n_{xy} eingeführt mit der Dimension [t/m], als dimensionslose Verformungsgrößen die Dehnungen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots \quad (4a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \dots \quad (4b)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots \quad (4c)$$

Mit (1a) wird dann

$$\varepsilon_x = \frac{1}{N} (\mu_x^x n_x + \mu_x^y n_y + \mu_x^{xy} n_{xy}) \quad \dots \quad (5a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{N} (\mu_y^x n_x + \mu_y^y n_y + \mu_y^{xy} n_{xy}) \quad \dots \quad (5b)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{N} (\mu_{xy}^x n_x + \mu_{xy}^y n_y + \mu_{xy}^{xy} n_{xy}) \quad \dots \quad (5c)$$

Differenzieren wir (4a) zweimal nach y , (4b) zweimal nach x und (4c) einmal nach x und einmal nach y , so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y},$$

woraus sich die Verträglichkeitsbedingung

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 0 \quad \dots \quad (6)$$

ergibt.

Setzen wir die Beziehungen (5) in (6) ein und ersetzen wir n durch die Spannungsfunktion F [mt], die die Gleichungsbedingung erfüllt, nach folgender Definition

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= n_x \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= n_y \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= n_{xy} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (7)$$

so erhalten wir die allgemeine Differentialgleichung für anisotrope Scheiben

$$\mu_y^y \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - (\mu_y^{xy} + \mu_{xy}^y) \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (\mu_x^y + \mu_y^x + \mu_{xy}^{xy}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - (\mu_x^{xy} + \mu_{xy}^x) \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + \mu_x^x \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad \dots \quad (8)$$

Diesen Typ der erweiterten Bipotentialgleichung wollen wir abgekürzt durch $\overline{AA}(\mu)F$ darstellen.

Die symmetrischen Koeffizienten, z. B. μ_y^{xy} und μ_{xy}^y sind nicht zusammengezogen, weil die Form der Differentialgleichung weiter unten noch bei Fällen auftritt, wo die Symmetrieeigenschaften eingeschränkt sind [siehe Gl. (20 a, b)].

Die Verformungszahlen μ_i^k müssen aus der Struktur des Systems bestimmt werden.

In den meisten Fällen, vor allem bei gegliederten Scheiben, ist es viel einfacher, die Spannzahlen n_i^k zu bestimmen und durch Inversion die Verformungszahlen μ_i^k zu finden.

In einer Arbeit von Chwalla [3] ist die Differentialgleichung (8) für den Sonderfall, daß die ausgezeichneten Richtungen rechtwinklig aufeinanderstehen, hergeleitet. Dazu werden die Verformungszahlen benutzt, zu deren Ermittlung Chwalla Meßergebnisse heranzieht. Wir werden an Beispielen zeigen, daß sich bei Anisotropie, die konstruktiver Art ist, auf dem Weg über die Spannzahlen die Koeffizienten der Differentialgleichung auch rechnerisch leicht ermitteln lassen. Dieser Vorteil wird besonders bei der später behandelten Platte spürbar, wo die Spannzahlen direkt die Koeffizienten der Differentialgleichung darstellen.

3.2 Beispiele für anisotrope Scheiben

3.2.1 Der Sonderfall der isotropen homogenen Scheibe

Aus den bekannten Elastizitätsbeziehungen für den ebenen Spannungszustand erhalten wir

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{pmatrix}$$

$$N = E \cdot t.$$

Damit wird (8) zur Bipotentialgleichung

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0.$$

In dieser Differentialgleichung ist die Querdehnungszahl μ nicht enthalten. Es läßt sich für bestimmte Aufgabenstellungen der Spannungszustand unabhängig von den Materialkonstanten bestimmen. Das ist stets möglich, wenn bei einfach zusammenhängenden Scheiben am Rand nur Spannungen und nicht mehr Verschiebungen als zum Festlegen der Starrkörperbewegung notwendig, vorgeschrieben sind, da die Beziehungen zwischen F und n nach (7) von μ frei sind. Dasselbe gilt auch für mehrfach zusammenhängende Scheiben, wenn längs jedes Randes die Belastung im Gleichgewicht ist [4].

3.2.2 Die orthogonal versteifte Scheibe

Eine isotrope homogene Scheibe mit der Dicke t sei in x - und y -Richtung mit Steifen verstärkt (Bild 1).

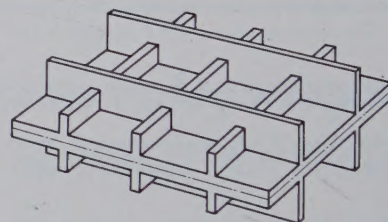


Bild 1. Element der orthotropen Scheibe

Es sei

f der Querschnitt der isotropen Scheibe/m
 f_x der Querschnitt der Steifen in x -Richtung/m
 f_y der Querschnitt der Steifen in y -Richtung/m.

Wir bestimmen nun zuerst die Matrix \mathfrak{N} .

Dazu brauchen wir die Spannungsresultanten in den 3 Einheitsverformungszuständen.

Zustand

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= 1 \\ \varepsilon_y &= 0 \\ \varepsilon_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} n_x &= E f_x + \frac{E}{1-\mu^2} f = \frac{E f}{1-\mu^2} \left[\frac{f_x}{f} (1-\mu^2) + 1 \right], \\ n_y &= \frac{\mu E}{1-\mu^2} f, \\ n_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Zustand

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= 0 \\ \varepsilon_y &= 1 \\ \varepsilon_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} n_x &= \frac{\mu E}{1-\mu^2} f, \\ n_y &= \frac{E f}{1-\mu^2} \left[\frac{f_y}{f} (1-\mu^2) + 1 \right], \\ n_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Zustand

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= 0 \\ \varepsilon_y &= 0 \\ \varepsilon_{xy} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} n_x &= 0, \\ n_y &= 0, \\ n_{xy} &= G f = \frac{E f}{1-\mu^2} \cdot \frac{1-\mu^2}{2(1+\mu)} \end{aligned}$$

damit
$$\Re \frac{1}{N} = \Re \frac{1 - \mu^2}{E f} = \begin{bmatrix} \bar{f}_x & \mu & 0 \\ \mu & \bar{f}_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \mu) \end{bmatrix}$$

Die Abkürzungen bedeuten

$$\bar{f}_x = \frac{f_x}{f} (1 - \mu^2) + 1,$$

$$\bar{f}_y = \frac{f_y}{f} (1 - \mu^2) + 1.$$

Die Inversion liefert

$$\Re^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{f}_y/\bar{f} & -\mu/\bar{f} & 0 \\ -\mu/\bar{f} & \bar{f}_x/\bar{f} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1-\mu} \end{bmatrix} \text{ mit } \bar{f} = \bar{f}_x \cdot \bar{f}_y - \mu^2$$

$$\bar{f} \cdot \Re = \begin{bmatrix} \bar{f}_y & -\mu & 0 \\ -\mu & \bar{f}_x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\bar{f}}{1-\mu} \end{bmatrix}.$$

In (8) eingesetzt erhalten wir

$$\bar{f}_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \left(\frac{1}{1-\mu} \bar{f} - \mu \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \bar{f}_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0.$$

Diese Differentialgleichung stimmt mit der in [5] abgeleiteten überein, wenn man dort die Verschiebungen $w = 0$ setzt, mit der in [6] für das gleiche Tragwerk angegebenen Differentialgleichung ergibt sich keine Übereinstimmung.

Im Übergang zur unversteiften Scheibe wird $f_x = 0, f_y = 0, \bar{f}_x = 1, \bar{f}_y = 1, \bar{f} = 1 - \mu^2$ und wir erhalten wieder die Bipotentialgleichung.

3. Das isotrope Netz

Die Maschen des isotropen Netzes werden gebildet durch gleichseitige Dreiecke (Bild 2). Wir haben drei Symmetrieachsen, die jeweils um $\pi/3$ gegeneinander gedreht sind. Damit bleiben die Elastizitätseigenschaften von der Richtung unabhängig [7].

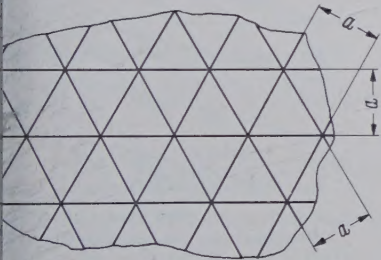


Bild 2. Struktur des isotropen Netzes

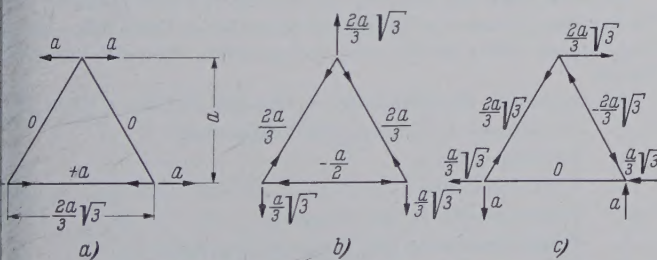


Bild 3. Die Einheitsbelastungszustände am Element des isotropen Netzes

Die Durchrechnung ergibt

Zustand	$n_x = 1$	$\epsilon_x = \frac{a}{EF}$
	$n_y = 0$	$\epsilon_y = -\frac{a}{3EF}$
	$n_{xy} = 0$	$\epsilon_{xy} = 0$

Zustand	$n_x = 0$	$\epsilon_x = -\frac{a}{3EF}$
	$n_y = 1$	$\epsilon_y = \frac{a}{EF}$
	$n_{xy} = 0$	$\epsilon_{xy} = 0$

Zustand
$$\begin{bmatrix} n_x = 0 \\ n_y = 0 \\ n_{xy} = 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \epsilon_x = 0, \\ \epsilon_y = 0, \\ \epsilon_{xy} = \frac{8a}{3EF}, \end{matrix}$$

damit wird
$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{a}{EF} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix}.$$

Einsetzen in (8) liefert wieder die Bipotentialgleichung. Die Stabkräfte sind proportional den Dehnungen des Netzes. Es treten also auch bei einachsiger Beanspruchung in den Stäben die rechtwinklig zur Beanspruchungsrichtung liegenden, Stabkräfte auf.

Die Querdehnungszahl des isotropen Netzes ist eine Strukturkonstante und unabhängig von der Art des Hookeschen Materials stets $1/3$ [8].

4. Platten und Roste

4.1 Allgemeine Ableitung der Differentialgleichung mit Hilfe der Spannzahlen \Re

Die Schnittgrößen der Platten und Roste sind die Spannungsergebnanten m_x, m_y, \bar{m}_{xy} und \bar{m}_{yx} mit der Dimension [t]. \bar{m}_{xy} und \bar{m}_{yx} sind nur in Sonderfällen, z. B. bei der isotropen Platte, gleich. Diesen vier Schnittgrößen stehen 3 Formänderungsgrößen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= k_x \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= k_y \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= -k_{xy} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

gegenüber. Wir fassen deshalb \bar{m}_{xy} und \bar{m}_{yx} zu einer Schnittgröße m_{xy} zusammen, um eine eindeutige Zuordnung zu ermöglichen.

$$m_{xy} = \bar{m}_{xy} + \bar{m}_{yx}.$$

Mit (2a) wird

$$m_x = N \left(\nu_x^x k_x + \nu_x^y k_y + \nu_x^{xy} k_{xy} \right) \dots \dots (10a)$$

$$m_y = N \left(\nu_y^x k_x + \nu_y^y k_y + \nu_y^{xy} k_{xy} \right) \dots \dots (10b)$$

$$m_{xy} = N \left(\nu_{xy}^x k_x + \nu_{xy}^y k_y + \nu_{xy}^{xy} k_{xy} \right) \dots \dots (10c)$$

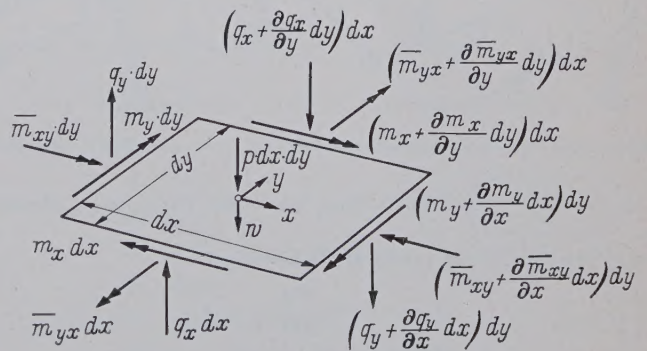


Bild 4. Die Schnittgrößen der Platte

Die Gleichgewichtsbedingungen (Bild 4) $\sum Z = 0; \sum M_x = 0; \sum M_y = 0$ ergeben die Beziehungen

$$\frac{\partial q_x}{\partial y} + \frac{\partial q_y}{\partial x} = -p \dots \dots (11a)$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial y} - \frac{\partial \bar{m}_{xy}}{\partial x} = q_x \dots \dots (11b)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial x} - \frac{\partial \bar{m}_{xy}}{\partial y} = q_y \dots \dots (11c)$$

(11b) und (11c) in (11a) eingesetzt, liefert die erste Hauptgleichung der Platte

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial x^2} = -p \dots \dots (12)$$

Sie ist, abgesehen vom Belastungsglied p , vollkommen analog zur Verträglichkeitsbedingung der Scheibe (6). Ersetzen wir nun noch die Schnittgrößen in (12) durch die Formänderungsgrößen gemäß (10), so erhalten wir die allgemeine Plattengleichung

$$\nu_y^y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (\nu_y^{xy} + \nu_{xy}^y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + (\nu_x^y + \nu_y^x + \nu_{xy}^{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - (\nu_x^{xy} + \nu_{xy}^x) \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \nu_x^x \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{p}{N} \quad (13)$$

$$\text{kurz} \quad \Delta \Delta (\nu) w = - \frac{p}{N}.$$

Im Gegensatz zur Scheibengleichung, die aus der Verträglichkeitsbedingung (6) hervorging, deshalb die Verformungszahlen μ_i^k enthält und frei ist von Belastungsgliedern, ging die Plattengleichung aus der Gleichgewichtsbedingung (12) hervor. Sie enthält daher die Spannzahlen ν_i^k und die Belastung. Im übrigen ist sie vollkommen analog zur Scheibengleichung.

Die Differentialgleichung (13) wurde ebenfalls von Chwalla [3] für den Sonderfall orthogonaler Anisotropie hergeleitet. Die Konstanten, die er benutzt, entsprechen nicht ganz unseren Spannzahlen, wodurch er die Analogie zur Scheibengleichung verliert. Außerdem bestimmt er die Koeffizienten auf dem Weg über die Einheitsbelastungszustände, wobei wieder auf den Versuch zurückgegriffen werden muß, während sie sich, wie wir an Beispielen zeigen werden, aus den Einheitsverformungszuständen rechnerisch ohne Schwierigkeiten ergeben.

4.2 Beispiele

4.2.1 Die homogene isotrope Platte

Zur Ermittlung von \mathfrak{N} betrachten wir wieder die Einheitsverformungszustände.

Jede Schicht der Platte unterliegt einem ebenen Spannungszustand, der sich aus den Einheitsverformungszuständen leicht ermitteln läßt.

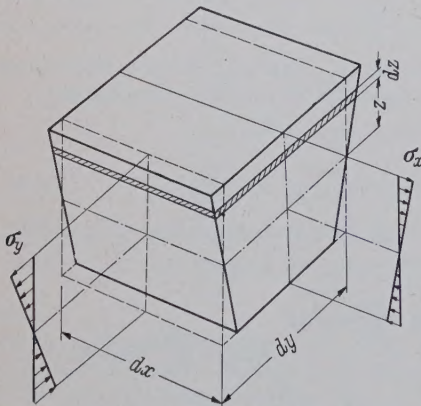


Bild 5. Der Einheitsverformungszustand $k_x = 1$

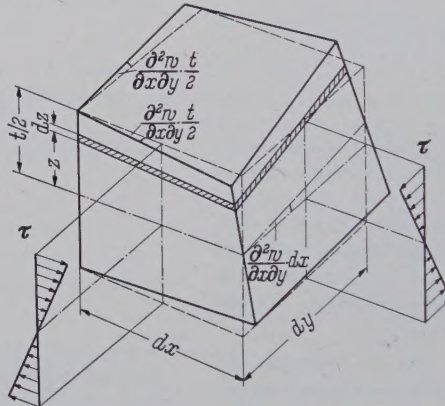


Bild 6. Der Einheitsverformungszustand $k_{xy} = 1$

$$1. \quad k_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 1 \quad (\text{Bild 5}). \text{ Eine Schicht der Dicke } dz \text{ im Abstand}$$

z von der Mittelebene erhält die Dehnungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -z, \\ \varepsilon_x &= 0, \\ \gamma_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

und die Spannungen

$$\begin{aligned} \sigma_y &= - \frac{E}{1-\mu^2} \cdot z, \\ \sigma_x &= - \frac{\mu E}{1-\mu^2} \cdot z, \\ \tau_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Schnittgrößen:

$$\begin{aligned} m_x &= \int \sigma_y \cdot z \cdot df = - \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)}, \\ m_y &= \int \sigma_x \cdot z \cdot df = - \frac{\mu E t^3}{12(1-\mu^2)}, \\ m_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

$$2. \quad k_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 1$$

Entsprechend erhält man hier

$$\begin{aligned} m_y &= - \frac{\mu E t^3}{12(1-\mu^2)}, \\ m_x &= - \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)}, \\ m_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

$$3. \quad k_{xy} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 1 \quad (\text{Bild 6})$$

$$\begin{aligned} \gamma &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot z = 2z, \\ \tau &= \gamma G = 2z \cdot G, \\ m_x &= 0, \\ m_y &= 0, \\ m_{xy} &= -2 \int \tau \cdot z \cdot df = -G \frac{t^3}{3}. \end{aligned}$$

Damit wird

$$\mathfrak{N} = \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1-\mu) \end{bmatrix}$$

und

$$N = \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)}.$$

\mathfrak{N} und N in (13) eingesetzt liefert die Differentialgleichung der isotropen homogenen Platte

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{N}.$$

Der Einfluß der Querdehnungszahl μ bei den verschiedenen Lagerungsfällen ist z. B. in [9] untersucht.

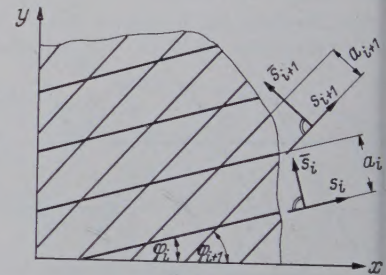


Bild 7.

Bezeichnungen am schiefwinkligen Rost

4.2.2 Der schiefwinklige Rost

Der Rost kann aus beliebig vielen Trägerscharen gebildet werden. In der Regel werden es 2 Scharen sein. Die zu einer Schar gehörenden Träger sollen gleich sein und gleichen Abstand voneinander haben.

Als zusätzliche Bezeichnungen wollen wir einführen (Bild 7)

- s_i Koordinate in Richtung der Trägerschar i
- \bar{s}_i Richtung \perp zu s_i
- φ_i Winkel zwischen s_i und x
- a_i Trägerabstand in der Schar i
- J_i Trägheitsmoment der Träger in der Schar i
- $B_i = \frac{E J_i}{a_i}$ bezogene Biegesteifigkeit der Schar i
- $\beta_i = \frac{B_i}{B_c}$ Biegesteifigkeitsverhältnis
- $D_i = \frac{G J_{Di}}{a_i}$ bezogene St. Venantsche Torsionssteifigkeit der Schar i
- $\delta_i = \frac{D_i^2}{B_c D_c}$ Drillsteifigkeitsverhältnis
- M_i Biegemoment im Träger i
- T_i Torsionsmoment im Träger i
- m auf die Längeneinheit bezogene Momente (mit einem Index Biegemoment, Index zeigt die Vektorrichtung an, mit zwei Indizes Drillmoment, 1. Index zeigt die Vektorrichtung an)

Formeln zum Umrechnen der Stabkoordinaten s_i und \bar{s}_i in die Rostkoordinaten x und y :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s_i^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \varphi_i + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \varphi_i + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \varphi_i \cos \varphi_i$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{s}_i \partial s_i} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \varphi_i \cos \varphi_i + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin \varphi_i \cos \varphi_i + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\cos^2 \varphi_i - \sin^2 \varphi_i)$$

Beziehungen zwischen den Schnittgrößen M und T der Träger und den Schnittresultanten m des Rostes (Bild 8):

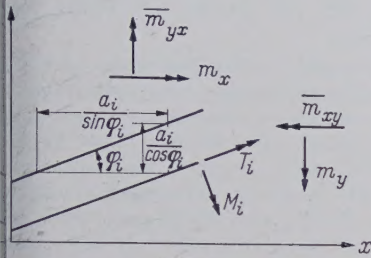


Bild 8.
Die Vorzeichen der Schnittgrößen

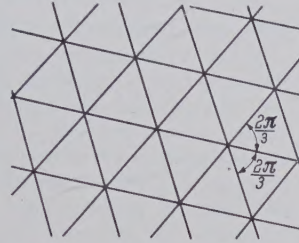


Bild 9.
Struktur des Hexagonalrostes

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \sum_{i=1}^n \frac{\sin \varphi_i}{a_i} (M_i \sin \varphi_i + T_i \cos \varphi_i) \\ m_y &= \sum_{i=1}^n \frac{\cos \varphi_i}{a_i} (M_i \cos \varphi_i - T_i \sin \varphi_i) \\ m_{xy} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} [2 M_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i + T_i (\cos^2 \varphi_i - \sin^2 \varphi_i)] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Zustand $k_x = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 1$

Die Schnittgrößen der Träger sind

$$M_i = - E J_i \frac{\partial^2 w}{\partial s_i^2} = - E J_i \sin^2 \varphi_i,$$

$$T_i = - G J_{Di} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{s}_i \partial s_i} = - G J_{Di} \sin \varphi_i \cos \varphi_i.$$

In die Formeln (14) eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} m_x &= - B_c [\sum \beta_i \sin^4 \varphi_i + \sum \delta_i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i] = B_c \cdot \nu_x^x \\ m_y &= - B_c [\sum \beta_i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i - \sum \delta_i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i] = B_c \cdot \nu_y^x \\ m_{xy} &= + B_c [\sum \beta_i 2 \sin^3 \varphi_i \cos \varphi_i + \sum \delta_i (\cos^3 \varphi_i - \sin^3 \varphi_i) \sin \varphi_i \cos \varphi_i] \\ &= B_c \cdot \nu_{xy}^x. \end{aligned}$$

Im Zustand $k_y = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 1$

werden die Schnittgrößen der Träger

$$M_i = - E J_i \cos^2 \varphi_i$$

$$T_i = + G J_{Di} \sin \varphi_i \cos \varphi_i$$

und damit die Schnittresultanten des Rostes:

$$\begin{aligned} m_x &= - B_c [\sum \beta_i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i - \sum \delta_i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i] = B_c \cdot \nu_x^y \\ m_y &= - B_c [\sum \beta_i \cos^4 \varphi_i - \sum \delta_i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i] = B_c \cdot \nu_y^y \\ m_{xy} &= + B_c [\sum \beta_i 2 \sin \varphi_i \cos^3 \varphi_i - \sum \delta_i (\cos^3 \varphi_i - \sin^3 \varphi_i) \sin \varphi_i \cos \varphi_i] \\ &= B_c \cdot \nu_{xy}^y. \end{aligned}$$

Zustand $k_{xy} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 1$

Hier wird

$$M_i = + 2 E J_i \sin \varphi_i \cos \varphi_i$$

$$T_i = + G J_{Di} (\cos^2 \varphi_i - \sin^2 \varphi_i)$$

und mit (14)

$$\begin{aligned} m_x &= B_c [2 \sum \beta_i \sin^3 \varphi_i \cos \varphi_i + \sum \delta_i (\cos^2 \varphi_i - \sin^2 \varphi_i) \sin \varphi_i \cos \varphi_i] \\ &= B_c \cdot \nu_x^{xy} \\ m_y &= B_c [2 \sum \beta_i \sin \varphi_i \cos^3 \varphi_i - \sum \delta_i (\cos^2 \varphi_i - \sin^2 \varphi_i) \sin \varphi_i \cos \varphi_i] \\ &= B_c \cdot \nu_y^{xy} \\ m_{xy} &= - B_c [4 \sum \beta_i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + \sum \delta_i (\cos^2 \varphi_i - \sin^2 \varphi_i)^2] \\ &= B_c \cdot \nu_{xy}^{xy}. \end{aligned}$$

Damit sind die Koeffizienten der Differentialgleichung bekannt. Die Symmetrie der Matrix \mathfrak{N} ergibt sich als Kontrolle.

Aus der allgemeinen Differentialgleichung sollen nun noch einige Sonderfälle gewonnen werden.

4.221 Der isotrope Rost (Hexagonalrost) (Bild 9) [10]

Mit $n = 3$

$$\varphi_3 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = B$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = D$$

ergibt sich die Differentialgleichung (der isotropen Platte)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{\frac{8}{3} (3B + D)}.$$

Der Hexagonalrost verhält sich wie eine isotrope Platte mit dem Plattenmodul $N = \frac{3}{8} (3B + D)$.

4.222 Der orthogonalisotrope Rost

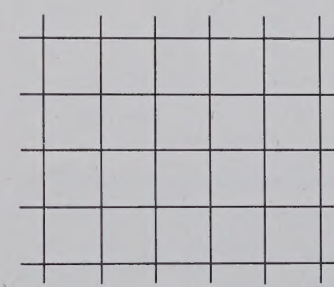


Bild 10.
Struktur des Quadratrostes, 1. Fall

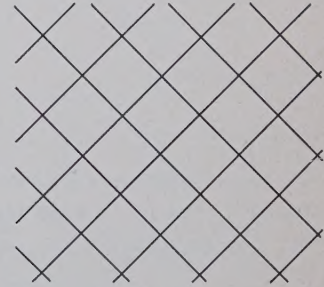


Bild 11.
Struktur des Quadratrostes, 2. Fall

1. Fall (Bild 10)

$$\varphi_1 = 0$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$B_1 = B_2$$

$$D_1 = D_2$$

Die Differentialgleichung lautet

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{D}{B} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{B}.$$

Wenn die Drillsteifigkeit der Träger klein ist, kann man das gemischte Glied der Differentialgleichung weglassen.

Anders ist es beim

2. Fall (Bild 11):

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$B_1 = B_2$$

$$D_1 = D_2$$

Hier lautet die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{6B - 2D}{B + D} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{2p}{B + D}.$$

In dieser Anordnung hat der Rost, auch wenn die Träger drillweich sind, eine vergleichsweise dreimal so große Drillsteifigkeit wie

die isotrope Platte. Die Biegesteifigkeit in x - und y -Richtung ist aber nur halb so groß wie im Fall 1.

Die Bilder 12 und 13 zeigen die Abhängigkeit der Beiwerte der Differentialgleichung vom Winkel φ , den die Stäbe mit dem Koordinatensystem bilden. Bild 12 gilt für drillweiche Träger ($\delta = 0$),

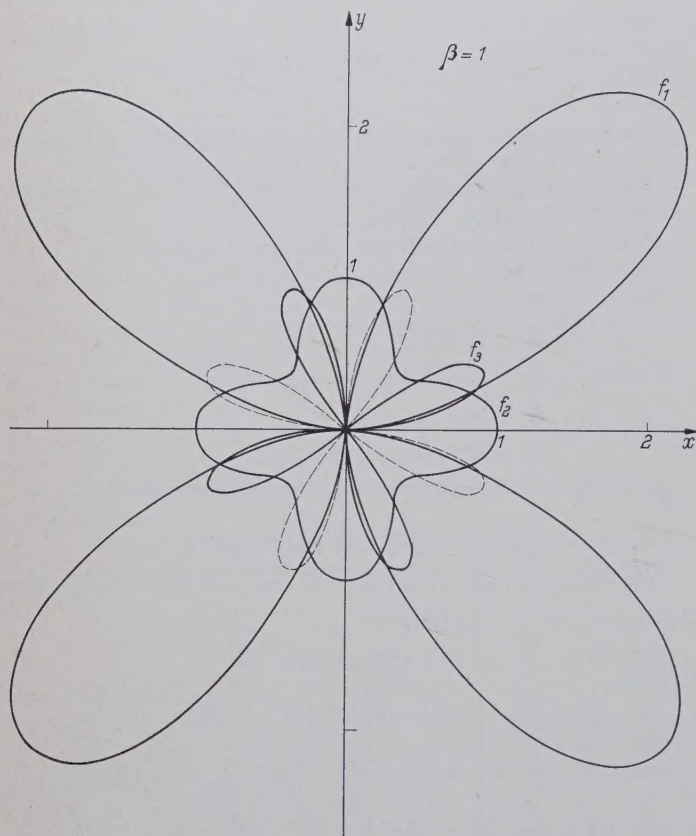


Bild 12. Koeffizienten der Differentialgleichung des Quadratrostes in Abhängigkeit von φ für $\delta = 0$, und zwar f_1 Koeffizient von $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$, f_2 Koeffizient von $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ und $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ und f_3 Koeffizient von $-\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y}$ und $\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3}$. Negative Werte sind gestrichelt.

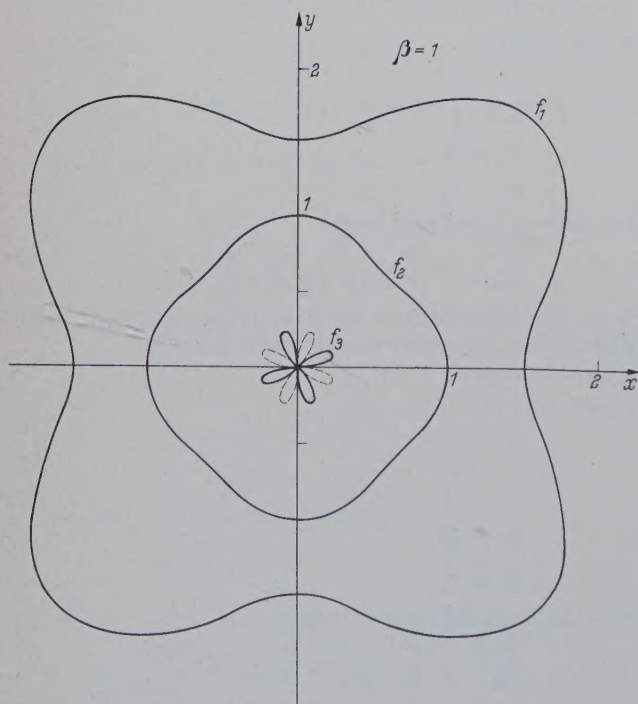


Bild 13. Koeffizienten der Differentialgleichung des Quadratrostes in Abhängigkeit von φ für $\delta = 3/4$. Bezeichnungen wie bei Bild 12.

Bild 13 für $\delta = 3/4$; das entspricht Trägern mit Kreis- oder Kreisring-Querschnitt. Der Rost mit $\delta = 1$ verhält sich wie die isotrope Platte.

5. Zur Mittelebene nicht symmetrische ebene Flächentragwerke

5.1 Ableitung der Differentialgleichungen

Bei diesem allgemeinen Falle, der z. B. bei den Stahlfahrbahn tafeln der Brücken gegeben ist, treten in den Einheitsverformungszuständen die Schnittgrößen von Scheibe und Platte gleichzeitig auf. So erhält man z. B. für $\varepsilon_x = 1$ nicht nur Membrankräfte, sondern auch Momente. Das gleiche gilt natürlich auch umgekehrt, infolge $m_x = 1$ z. B. entstehen außer den Krümmungen auch Dehnungen. Die Elastizitätsbeziehungen von Scheibe und Platte sind nicht mehr voneinander unabhängig.

Da die Verformungs- oder Spannzahlen nun gemeinsam in einer Matrix auftreten, muß die Zuordnung zwischen den Verformungen und Schnittgrößen für Scheibe und Platte aufeinander abgestimmt werden, damit die Matrix symmetrisch wird. Bei der Platte hatten wir den positiven Krümmungen k_x und k_y negative Momente m_x zugeordnet, bei der Scheibe aber den positiven Dehnungen ε_x und ε_y auch positive Schnittgrößen n . Durch diese Festlegung wird die Symmetrie der Matrizen \mathfrak{M} und \mathfrak{N} insofern gestört, als der rechte obere Quadrant und der linke untere Quadrant sich im Vorzeichen unterscheiden. Dieser Vorzeichenunterschied wird später durch eine Matrizenoperation ausgeglichen.

Die Elastizitätsbeziehungen sind also für den allgemeinsten Fall folgendermaßen zu formulieren:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_x^x & \mu_x^y & \mu_x^{xy} & \bar{\mu}_x^x & \bar{\mu}_x^y & \bar{\mu}_x^{xy} \\ \mu_y^x & \mu_y^y & \mu_y^{xy} & \bar{\mu}_y^x & \bar{\mu}_y^y & \bar{\mu}_y^{xy} \\ \mu_{xy}^x & \mu_{xy}^y & \mu_{xy}^{xy} & \bar{\mu}_{xy}^x & \bar{\mu}_{xy}^y & \bar{\mu}_{xy}^{xy} \\ -\bar{\mu}_x^x & -\bar{\mu}_x^y & -\bar{\mu}_x^{xy} & \bar{\mu}_x^x & \bar{\mu}_x^y & \bar{\mu}_x^{xy} \\ -\bar{\mu}_y^x & -\bar{\mu}_y^y & -\bar{\mu}_y^{xy} & \bar{\mu}_y^x & \bar{\mu}_y^y & \bar{\mu}_y^{xy} \\ -\bar{\mu}_{xy}^x & -\bar{\mu}_{xy}^y & -\bar{\mu}_{xy}^{xy} & \bar{\mu}_{xy}^x & \bar{\mu}_{xy}^y & \bar{\mu}_{xy}^{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{pmatrix} \quad (15)$$

und

$$\begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_x^x & \nu_x^y & \nu_x^{xy} & -\bar{\nu}_x^x & -\bar{\nu}_x^y & -\bar{\nu}_x^{xy} \\ \nu_y^x & \nu_y^y & \nu_y^{xy} & -\bar{\nu}_y^x & -\bar{\nu}_y^y & -\bar{\nu}_y^{xy} \\ \nu_{xy}^x & \nu_{xy}^y & \nu_{xy}^{xy} & -\bar{\nu}_{xy}^x & -\bar{\nu}_{xy}^y & -\bar{\nu}_{xy}^{xy} \\ \bar{\nu}_x^x & \bar{\nu}_x^y & \bar{\nu}_x^{xy} & \bar{\nu}_x^x & \bar{\nu}_x^y & \bar{\nu}_x^{xy} \\ \bar{\nu}_y^x & \bar{\nu}_y^y & \bar{\nu}_y^{xy} & \bar{\nu}_y^x & \bar{\nu}_y^y & \bar{\nu}_y^{xy} \\ \bar{\nu}_{xy}^x & \bar{\nu}_{xy}^y & \bar{\nu}_{xy}^{xy} & \bar{\nu}_{xy}^x & \bar{\nu}_{xy}^y & \bar{\nu}_{xy}^{xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Da die Elemente der Vektoren verschiedenartig sind, haben auch die μ -Werte verschiedene Dimensionen, und zwar:

$$\begin{aligned} \mu_i^k & \text{ [m/t]}, & \nu_i^k & \text{ [t/m]}, \\ \bar{\mu}_i^k & \text{ [1/t]}, & \bar{\nu}_i^k & \text{ [t]}, \\ \bar{\mu}_i^k & \text{ [1/mt]}, & \bar{\nu}_i^k & \text{ [mt]}. \end{aligned}$$

Aus diesem Grund ist keine gemeinsame Elastizitätskonstante herausgezogen worden.

Die Symmetrieeigenschaften gelten nur noch für μ_i^k und $\bar{\mu}_i^k$.

$$\text{Es ist} \quad \mu_i^k = \mu_k^i, \quad \nu_i^k = \nu_k^i, \\ \bar{\mu}_i^k = \bar{\mu}_k^i, \quad \bar{\nu}_i^k = \bar{\nu}_k^i,$$

$$\text{aber} \quad \bar{\mu}_i^k \neq \bar{\mu}_k^i, \quad \bar{\nu}_i^k \neq \bar{\nu}_k^i.$$

Je nach der Belastungsart stehen für die Aufstellung der Differentialgleichung zunächst zwei Bedingungen zur Verfügung: wirkt die Belastung in der Tragwerkebene (Scheibenbelastung), so nehmen wir die Verträglichkeitsbedingung (6), für den rechtwinklig zur Tragwerkebene wirkenden Anteil der Last (Plattenbelastung) benutzen wir die Gleichgewichtsbedingung (12).

Nun tritt aber folgende Schwierigkeit auf: Beim Einsetzen von (15) in (6) lassen sich die Schnittgrößen m nicht eliminieren. Das gleiche zeigt sich für die Dehnungen, wenn wir (16) in (12) einsetzen. Die Beziehungen (15) und (16) müßten deshalb in eine andere Form gekleidet werden.

Für die Differentialgleichungen brauchen wir eine Beziehung zwischen den Dehnungen ε und den Momenten m einerseits und den Membrankräften n und den Krümmungen k andererseits. Das gelingt durch Teilinversion der beiden Matrizen \mathfrak{M} und \mathfrak{N} .

Zu diesem Zweck spalten wir \mathfrak{M} und \mathfrak{N} auf in je vier Teilmatrizen \mathfrak{M}_{11} , \mathfrak{M}_{12} , \mathfrak{M}_{21} und \mathfrak{M}_{22} sowie \mathfrak{N}_{11} , \mathfrak{N}_{12} , \mathfrak{N}_{21} und \mathfrak{N}_{22} mit je neun Elementen.

(15) stellt sich dann so dar

$$\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{M}_{11} & \mathfrak{M}_{12} \\ \mathfrak{M}_{21} & \mathfrak{M}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}.$$

In gleicher Weise erhalten wir (16) in der Form

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{N}_{11} & \mathfrak{N}_{12} \\ \mathfrak{N}_{21} & \mathfrak{N}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Das Ziel der Umformung ist die Darstellung

$$\begin{bmatrix} e \\ m \end{bmatrix} = \mathfrak{R} \cdot \begin{bmatrix} n \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{R}_{11} & \mathfrak{R}_{12} \\ \mathfrak{R}_{21} & \mathfrak{R}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n \\ f \end{bmatrix} \quad \dots (17a)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ f \end{bmatrix} = \mathfrak{Q} \cdot \begin{bmatrix} e \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{Q}_{11} & \mathfrak{Q}_{12} \\ \mathfrak{Q}_{21} & \mathfrak{Q}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ m \end{bmatrix} \quad \dots (17b)$$

Für die Elemente von \mathfrak{R} , die wir κ nennen wollen, und zwar in \mathfrak{R}_{11} κ , in \mathfrak{R}_{12} und \mathfrak{R}_{21} $\bar{\kappa}$, und in \mathfrak{R}_{22} $\bar{\bar{\kappa}}$, ergibt sich mit den Methoden der Matrizenrechnung

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} \mathfrak{M}_{11} - \mathfrak{M}_{12} \cdot \mathfrak{M}_{22}^{-1} \cdot \mathfrak{M}_{21} & \mathfrak{M}_{12} \cdot \mathfrak{M}_{22}^{-1} \\ -\mathfrak{M}_{22}^{-1} \cdot \mathfrak{M}_{21} & \mathfrak{M}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad \dots (18a)$$

oder
$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} \mathfrak{N}_{11}^{-1} & -\mathfrak{N}_{11}^{-1} \cdot \mathfrak{N}_{12} \\ \mathfrak{N}_{21} \cdot \mathfrak{N}_{11}^{-1} & \mathfrak{N}_{22} - \mathfrak{N}_{21} \cdot \mathfrak{N}_{11}^{-1} \cdot \mathfrak{N}_{12} \end{bmatrix} \quad \dots (18b)$$

Da \mathfrak{M}_{12} die Transponierte von $-\mathfrak{M}_{21}$ ist, so wird auch

$\mathfrak{M}_{12} \mathfrak{M}_{22}^{-1}$ die Transponierte von $-\mathfrak{M}_{22}^{-1} \cdot \mathfrak{M}_{21}$,

d. h. die Matr. \mathfrak{R} ist symmetrisch. Ebenso erhalten wir \mathfrak{Q} mit den Elementen λ_i^k , λ_i^k und $\bar{\lambda}_i^k$ als Kehrmatrix von \mathfrak{R} , indem wir in (18 a) \mathfrak{M} durch \mathfrak{N} oder in (18 b) \mathfrak{N} durch \mathfrak{M} ersetzen.

$$\mathfrak{Q} = \begin{bmatrix} \mathfrak{M}_{11}^{-1} & -\mathfrak{M}_{11}^{-1} \mathfrak{M}_{12} \\ \mathfrak{M}_{21} \cdot \mathfrak{M}_{11}^{-1} & \mathfrak{M}_{22} - \mathfrak{M}_{21} \cdot \mathfrak{M}_{11}^{-1} \cdot \mathfrak{M}_{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathfrak{Q} = \begin{bmatrix} \mathfrak{N}_{11} - \mathfrak{N}_{12} \cdot \mathfrak{N}_{22}^{-1} \cdot \mathfrak{N}_{21} & \mathfrak{N}_{12} \cdot \mathfrak{N}_{22}^{-1} \\ -\mathfrak{N}_{22}^{-1} \cdot \mathfrak{N}_{21} & \mathfrak{N}_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

\mathfrak{Q} ist als Kehrmatrix von \mathfrak{R} ebenfalls symmetrisch.

Nun läßt sich (17 a) in (6) einsetzen, und wir erhalten, wenn wir noch die Beziehungen (7) und (9) benutzen, die Differentialgleichung der anisotropen zur Mittelebene nicht symmetrischen Scheibe

$$\begin{aligned} & \kappa_y^y \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - (\kappa_y^{xy} + \kappa_{xy}^y) \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (\kappa_x^y + \kappa_y^x + \kappa_{xy}^{xy}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - (\kappa_x^{xy} + \kappa_{xy}^x) \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + \kappa_x^x \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \bar{\kappa}_y^y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (\bar{\kappa}_y^{xy} + \bar{\kappa}_{xy}^y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} \\ & + (\bar{\kappa}_x^y + \bar{\kappa}_y^x + \bar{\kappa}_{xy}^{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - (\bar{\kappa}_x^{xy} + \bar{\kappa}_{xy}^x) \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \bar{\kappa}_x^x \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \end{aligned}$$

mit unserer Abkürzung

$$\overline{\Delta \Delta}(\kappa) F + \overline{\Delta \Delta}(\bar{\kappa}) w = 0 \quad \dots (20a)$$

In gleicher Weise erhalten wir, wenn wir (17 a) in (12) einsetzen, unter Beachtung der Beziehungen (7) und (9) die Differentialgleichung der anisotropen zur Mittelebene nicht symmetrischen Platte

$$\begin{aligned} & \bar{\kappa}_y^y \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (\bar{\kappa}_y^{xy} + \bar{\kappa}_{xy}^y) \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (\bar{\kappa}_x^y + \bar{\kappa}_y^x + \bar{\kappa}_{xy}^{xy}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & - (\bar{\kappa}_x^{xy} + \bar{\kappa}_{xy}^x) \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + \bar{\kappa}_x^x \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \bar{\kappa}_y^y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (\bar{\kappa}_y^{xy} + \bar{\kappa}_{xy}^y) \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} \\ & + (\bar{\kappa}_x^y + \bar{\kappa}_y^x + \bar{\kappa}_{xy}^{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - (\bar{\kappa}_x^{xy} + \bar{\kappa}_{xy}^x) \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + \bar{\kappa}_x^x \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -p, \end{aligned}$$

kurz
$$\overline{\Delta \Delta}(\bar{\kappa}) F + \overline{\Delta \Delta}(\bar{\bar{\kappa}}) w = -p \quad \dots (20b)$$

Die beiden Differentialgleichungen (20 a) und (20 b) sind miteinander gekoppelt.

Der Vollständigkeit halber sollen nun noch durch Einführen der Hilfsfunktionen f und W die beiden Differentialgleichungen in anderer Form gewonnen werden.

Die Funktion F erfüllt die Gleichgewichtsbedingung der Scheibe

$$\frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 n_y}{\partial y^2} = 0 \quad \dots (21)$$

und lieferte durch Einsetzen in die Verträglichkeitsbedingung (6) die erste Differentialgleichung (20 a).

Die Hilfsfunktion f , die nun so definiert sei, daß sie die Verträglichkeitsbedingung erfüllt, wird dann in die Gleichgewichtsbedingung eingesetzt. Mit der Definition

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \varepsilon_x \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \varepsilon_y \\ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \varepsilon_{xy} \end{aligned} \right\} \quad \dots (22)$$

ist (6) erfüllt.

Beim Plattenanteil müssen wir die neue Hilfsfunktion W so wählen, daß sie die Gleichgewichtsbedingung der Platte (12) erfüllt für den Fall, daß $p = 0$ ist.

Tafel 1. Zusammenstellung der wichtigsten Beziehungen für das ebene Flächentragwerk

Bezeichnung	Scheibenanteil	Plattenanteil
1. Schnittgrößen $n =$ $m =$	n_x, n_y, n_{xy} —	— m_x, m_y, m_{xy}
2. Verformungsgrößen $\varepsilon =$ $f =$	$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ —	k_x, k_y, k_{xy}
3. Elastizitätsgesetz $e =$ $f =$ $n =$ $m =$	$\mathfrak{M}_{11} \cdot n$ $\mathfrak{M}_{21} \cdot n$ $\mathfrak{N}_{11} \cdot e$ $\mathfrak{N}_{21} \cdot e$	$+ \mathfrak{M}_{12} \cdot m$ $+ \mathfrak{M}_{22} \cdot m$ $+ \mathfrak{N}_{12} \cdot f$ $+ \mathfrak{N}_{22} \cdot f$
4. Hilfsfunktionen	F erfüllt die Gleichgewichtsbedingung f erfüllt die Verträglichkeitsbedingung	W erfüllt d. Gleichgewichtsbedingung, wenn $p = 0$ w erfüllt die Verträglichkeitsbedingung
5. Definition der Hilfsfunktionen	$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = n_x$ $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = n_y$ $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -n_{xy}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \varepsilon_x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \varepsilon_y$ $2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \varepsilon_{xy}$	$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = m_x$ $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = m_y$ $2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = m_{xy}$ $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = k_x$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = k_y$ $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -k_{xy}$
6. Verträglichkeitsbedingung	$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial^2 k_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 k_y}{\partial y^2} = 0$
7. Gleichgewichtsbedingung	$\frac{\partial^2 n_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 n_y}{\partial y^2} = 0$	$\frac{\partial^2 m_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial x^2} = -p$
8. Differentialgleichungen aus Verträglichkeitsbedingung	$\overline{\Delta \Delta}(\kappa) F$ $\overline{\Delta \Delta}(\bar{\kappa}) f$	$+ \overline{\Delta \Delta}(\bar{\kappa}) w = 0$ $+ \overline{\Delta \Delta}(\bar{\bar{\kappa}}) W = 0$
9. Differentialgleichungen aus Gleichgewichtsbedingung	$\overline{\Delta \Delta}(\bar{\kappa}) F$ $\overline{\Delta \Delta}(\lambda) f$	$+ \overline{\Delta \Delta}(\bar{\bar{\kappa}}) w = -p$ $+ \overline{\Delta \Delta}(\bar{\lambda}) W = 0$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= m_x \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= m_y \\ 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} &= m_{xy} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

Mit Hilfe von (16), (22) und (23) läßt sich nun n durch f und W ausdrücken und in (21) einsetzen, woraus sich

$$\begin{aligned} \lambda_x^x \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \lambda_x^{xy} \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} + (\lambda_x^y - \lambda_y^x) \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} - 2 \lambda_y^{xy} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} \\ - \lambda_y^y \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \bar{\lambda}_x^x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \bar{\lambda}_x^{xy} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + (\bar{\lambda}_x^y - \bar{\lambda}_y^x) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - 2 \bar{\lambda}_y^{xy} \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} - \bar{\lambda}_y^y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{kurz} \quad \overline{\Delta\Delta}(\lambda) f + \overline{\Delta\Delta}(\bar{\lambda}) W = 0 \dots \dots \dots (24a)$$

ergibt. Die zweite Differentialgleichung erhalten wir aus der Verträglichkeitsbedingung der Platte

$$\frac{\partial^2 k_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 k_y}{\partial y^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{zu} \quad \bar{\lambda}_x^x \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \bar{\lambda}_x^{xy} \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} + (\bar{\lambda}_x^y - \bar{\lambda}_y^x) \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} - 2 \bar{\lambda}_y^{xy} \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} \\ - \bar{\lambda}_y^y \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \bar{\lambda}_x^x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \bar{\lambda}_x^{xy} \frac{\partial^4 W}{\partial x^3 \partial y} + (\bar{\lambda}_x^y - \bar{\lambda}_y^x) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} \\ - 2 \bar{\lambda}_y^{xy} \frac{\partial^4 W}{\partial x \partial y^3} - \bar{\lambda}_y^y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{kurz} \quad \overline{\Delta\Delta}(\bar{\lambda}) f + \overline{\Delta\Delta}(\bar{\lambda}) W = 0 \dots \dots \dots (24b)$$

Welcher der beiden Formulierungen (20) oder (24) der Vorzug zu geben ist, entscheidet für den jeweiligen Fall die Art der Belastung und der Randbedingungen; die praktisch wichtigste Formulierung ist jedenfalls (20).

In der Tafel 1 sind die wichtigsten Beziehungen für das ebene anisotrope Flächentragwerk noch einmal zusammengestellt, wobei auch die Analogien deutlich werden.

Der mechanischen Analogie entspricht die Anordnung in den einzelnen Zeilen, die formale Analogie ist durch die Pfeile hervorgehoben. Bei den Beziehungen, die Platten- und Scheibenteile gemeinsam enthalten, fehlt der mittlere Trennungsstrich in den Zeilen. Die Anteile im Kleindruck in diesen Zeilen sind die Koppelglieder, die bei zur Mittelebene symmetrischer Steifenanordnung zu Null werden. Aus κ_i^k und λ_i^k wird dann μ_i^k und $\bar{\kappa}_i^k$ und $\bar{\lambda}_i^k$ wird zu ν_i^k .

5.2 Beispiel: Die orthogonal versteifte Platte

Über diesen praktisch sehr wichtigen Fall liegen schon mehrere Arbeiten vor. Wir wollen uns hier an die Bezeichnungsweise halten, wie sie in der Arbeit von Giencke [5] angegeben und später auch von Massonet [11] übernommen worden ist:

$$D = \frac{E \cdot t}{1 - \mu^2} = \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot f,$$

$$D_x = D + E \cdot f_x,$$

$$D_y = D + E \cdot f_y,$$

$$B = \frac{E t^3}{12(1 - \mu^2)} = E \cdot b,$$

$$B_x = B + E \cdot b_x,$$

$$B_y = B + E \cdot b_y,$$

$$B_{xy} = \frac{1}{3} \int G t^2 df_x,$$

$$B_{yx} = \frac{1}{3} \int G t^2 df_y,$$

$$e_x = \frac{1}{D_x} \int E(z) \cdot z df_x,$$

$$e_y = \frac{1}{D_y} \int E(z) \cdot z df_y.$$

Über die Zuordnung zwischen den Scheiben- und Plattengrößen ist bereits gesprochen worden. Hier ist nun noch ein Wort zu sagen über die Zuordnung zwischen den Schnitt- und Verformungsgrößen. Damit die Spannzahlen die Kehrmatrix der Verformungszahlen bilden, müssen sich die Schnitt- und Verformungsgrößen genau entsprechen. Für die Einheitsverformungszustände $\varepsilon_x = 1$, $\varepsilon_y = 1$ und $\varepsilon_{xy} = 1$ gibt es keine Fragen; hier müssen jeweils die nicht gefragten Dehnungen oder Schiebungen und die Krümmungen und die Verwindung ausgeschaltet werden. Bei den Einheitsverformungszuständen $k_x = 1$, $k_y = 1$ und $k_{xy} = 1$ muß nun aber entschieden werden, welche Ebene der Platte ungedehnt bleibt. Diese Ebene muß dann auch als Bezugsebene für die Momente und die Normalkräfte genommen werden. Giencke wählt als Bezugsebene die Mittelfläche des Deckbleches. Die Koeffizienten der Differentialgleichung bleiben von dieser Annahme unabhängig, weil sie nur die Definition der Momente beeinflusst, diese aber aus der Differentialgleichung durch w eliminiert sind und w für jede Bezugsebene gleich ist. Es ändern sich freilich die Matrizen \mathfrak{N} und \mathfrak{R} .

Wir leiten zunächst mit Bezug auf die Mittelfläche des Deckbleches die Spannzahlen ab und wollen dann noch die beiden Matrizen \mathfrak{N} und \mathfrak{R} für den Fall angeben, daß die Bezugsebene in der jeweiligen Schwerkraft der Richtungen x und y , also im Abstand e_x und e_y von der Mittelebene der isotropen Platte liegt. Die Behandlung der Einheitsverformungszustände zeigt wieder deutlich den Vorteil, den sie gegenüber den Einheitsbelastungszuständen haben, weil sie wie bei dem vorliegenden Beispiel sofort die Spannungen liefern, aus denen nun die Schnittgrößen integriert werden können, während die Verteilung der Einheitsbelastung auf die einzelnen Konstruktionsteile wie Platte und Steifen erst statisch unbestimmt ermittelt werden muß. Der Vorteil findet sich bei allen Systemen, in denen ein- und mehrachsige Spannungszustände formänderungsmäßig gekoppelt sind und auch bei solchen, bei denen die Elastizitätshauptachsen nicht mit dem Koordinatensystem der Platte zusammenfallen.

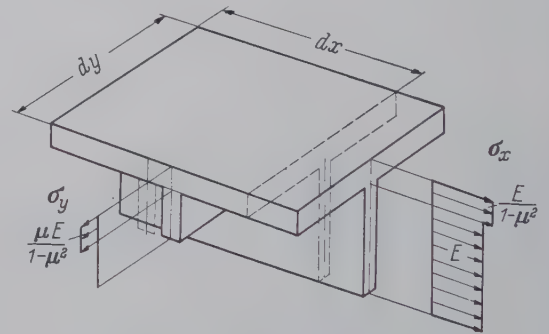


Bild 14. Einheitsverformungszustand $\varepsilon_x = 1$

$$\text{Zustand} \quad \boxed{\varepsilon_x = 1}$$

Den Verformungszustand und die zugehörigen Spannungen zeigt Bild 14. Durch Integration der Spannungen erhalten wir

$$n_x = \int \sigma_x \cdot df_x = D_x,$$

$$n_y = \int \sigma_y \cdot df_y = \mu \cdot D,$$

$$n_{xy} = 0,$$

$$m_x = \int \sigma_y \cdot z \cdot df_y = 0,$$

$$m_y = \int \sigma_x \cdot z \cdot df_x = -e_x D_x,$$

$$m_{xy} = 0.$$

$$\text{Zustand} \quad \boxed{\varepsilon_y = 1}$$

Entsprechend wird

$$n_x = \mu D,$$

$$m_x = -e_y \cdot D_y,$$

$$n_y = D_y,$$

$$m_y = 0,$$

$$n_{xy} = 0,$$

$$m_{xy} = 0.$$

$$\text{Zustand} \quad \boxed{\varepsilon_{xy} = 1} \quad (\text{Bild 15}).$$

In diesem Zustand wurden die Schubspannungen in den Steifen vernachlässigt und die Schubresultante n_{xy} allein dem Deckblech zugewiesen.

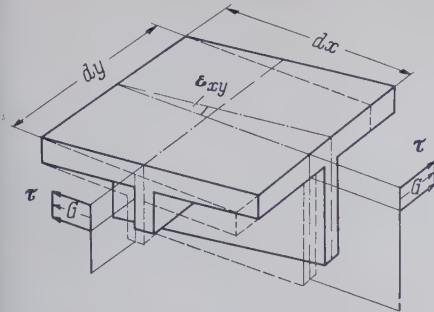


Bild 15. Einheitsverformungszustand $\varepsilon_{xy} = 1$

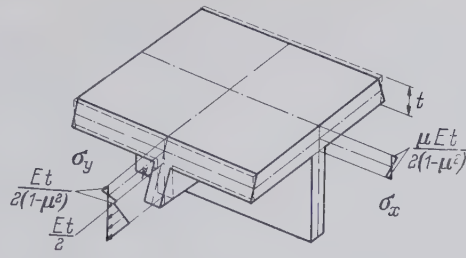


Bild 16. Einheitsverformungszustand $k_x = 1$

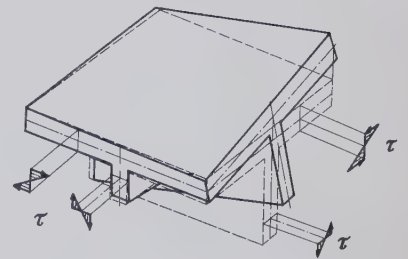


Bild 17. Einheitsverformungszustand $k_{xy} = 1$

$$\begin{aligned} n_x &= 0, & m_x &= 0. \\ n_y &= 0, & m_y &= 0. \\ n_{xy} &= \frac{D}{2}(1-\mu), & m_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Die Schubresultante n_{xy} und das Drillmoment m_{xy} sind durch die Wahl der Mittelebene des Deckbleches als Bezugsebene entkoppelt.

Zustand $k_x = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 1$

Die Mittellinie der isotropen Platte (Deckblech) bleibt ungedehnt (Bild 16).

$$\begin{aligned} n_x &= 0, & m_x &= -e_y \cdot D_y \cdot e_y - B_y. \\ n_y &= e_y \cdot D_y, & m_y &= -\mu \cdot B, \\ n_{xy} &= 0, & m_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Zustand $k_y = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 1$

Zustand $k_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 1$ (Bild 17).

Der Torsionswiderstand der Steifen wird berücksichtigt. Die Verdrehung ϑ' der Steifen läßt sich durch die Verwindung der Platte ausdrücken.

$$\vartheta' = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - 1.$$

Der Torsionswiderstand der isotropen Platte ist $B(1-\mu)$. Normalspannungen sind nicht vorhanden. Dann wird

$$\begin{aligned} n_x &= 0, & m_x &= 0, \\ n_y &= 0, & m_y &= 0, \\ n_{xy} &= 0, & m_{xy} &= B_{xy} + B_{yx} + 2B(1-\mu). \end{aligned}$$

Nun sind sämtliche Spannzahlen ermittelt und damit ist \mathfrak{R} bekannt.

$\mathfrak{R} =$

D_x	μD	0	0	$-e_x D_x$	0
μD	D_y	0	$-e_y D_y$	0	0
0	0	$\frac{D}{2}(1-\mu)$	0	0	0
0	$e_y D_y$	0	$-e_y^2 D_y - B_y$	$-\mu B$	0
$e_x D_x$	0	0	$-\mu B$	$-e_x^2 D_x - B_x$	0
0	0	0	0	0	$2(1-\mu)B + (B_{xy} + B_{yx})$

Die Rechenvorschrift (18 b) ergibt mit $K = D_x D_y - \mu^2 \cdot D^2$

$K \cdot \mathfrak{R} =$

D_y	$-\mu D$	0	$-\mu e_y D D_y$	$e_x D_x D_y$	0
$-\mu D$	D_x	0	$e_y D_x D_y$	$-\mu e_x D D_x$	0
0	0	$\frac{2K}{(1-\mu)D}$	0	0	0
$-\mu e_y D D_y$	$e_y D_x D_y$	0	$-K(B_y + e_y^2 D_y) + e_y^2 D_y^2 D_x$	$-\mu B K$	0
$e_x D_x D_y$	$-\mu e_x D D_x$	0	$-\mu B K$	$-K(B_x + e_x^2 D_x) + e_x^2 D_x^2 D_y$	0
0	0	0	0	0	$[2(1-\mu)B + (B_{xy} + B_{yx})]K$

Setzt man die Werte κ in die Differentialgleichung (20) ein, so erhält man

$$D_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{K}{D(1-\mu)} - \mu \cdot D \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial y^2 \partial x^2} + D_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \left[\mu e_x D D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (e_x + e_y) D_x D_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \mu e_y D D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = 0 \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} & \mu e_x D D_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - (e_x + e_y) D_x D_y \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \mu e_y D D_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + [K(B_x + e_x^2 D_x) + e_x^2 D_x^2 D_y] \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\ & + \{2(\mu B K + \mu e_x e_y D D_x D_y) - [2(1-\mu)B + B_{xy} + B_{yx}]K\} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & + [K(B_y + e_y^2 D_y) + e_y^2 D_y^2 D_x] \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{K} \quad \dots \dots \dots (26b) \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (26) lassen sich in die Gienger'sche Form überführen, wenn man dort B_{xy} und B_{yx} als den halben Torsionswiderstand der Steifen definiert, also

$$B_{xy} = \frac{1}{6} \int G t^2 d f_x, \quad B_{yx} = \frac{1}{6} \int G t^2 d f_y.$$

Bei Bezug der Schnittgrößen auf die Schwerebenen der anisotropen Gesamtplatte erhält man folgende Matrizen:

$$\mathfrak{R} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline D_x & \mu D & 0 & \mu e_y \cdot D & 0 & 0 \\ \hline \mu \cdot D & D_y & 0 & 0 & \mu e_x D_x & 0 \\ \hline 0 & 0 & (1-\mu) \frac{D}{2} & 0 & 0 & -(1-\mu)(e_x + e_y) \frac{D}{2} \\ \hline -\mu e_y D & 0 & 0 & -B_y & -\mu(e_x e_y D + B) & 0 \\ \hline 0 & \mu e_x D & 0 & -\mu(e_x e_y D + B) & -B_x & 0 \\ \hline 0 & 0 & (1-\mu)(e_x + e_y) D & 0 & 0 & -\frac{D}{2}(1-\mu)(e_x + e_y)^2 \\ & & & & & - (1-\mu) 2 B \\ & & & & & - B_{xy} - B_{yx} \\ \hline \end{array}$$

$$K \cdot \mathfrak{R} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline D_y & -\mu D & 0 & -\mu e_y D D_y & \mu^2 e_x D^2 & 0 \\ \hline -\mu D & D_x & 0 & \mu^2 e_y D^2 & -\mu e_x D D_x & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{K}{(1-\mu) D} & 0 & 0 & K(e_x + e_y) \\ \hline -\mu e_y D D_y & \mu^2 e_y D^2 & 0 & -K \cdot B_y + \mu^2 e_y^3 D^2 D_y & -K \mu B - \mu e_x e_y D D_x D_y & 0 \\ \hline \mu^2 e_x D^2 & -\mu e_x D D_x & 0 & -K \mu B - \mu e_x e_y D D_x D_y & -K \cdot B_x + \mu^2 e_x^3 D^2 D_x & 0 \\ \hline 0 & 0 & K(e_x + e_y) & 0 & 0 & -K[2B(1-\mu) + B_{xy} + B_{yx}] \\ \hline \end{array}$$

Die neue Matrix \mathfrak{R} führt durch Einsetzen in (20) wieder auf die Differentialgleichung (26).

Die Anwendbarkeit der Huber'schen Form [12]

$$B_x \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p$$

zur näherungsweisen Behandlung der exzentrisch versteiften Platte ist in den letzten Jahren im Schrifttum wiederholt erörtert worden. Wohl als erster hat Cornelius [13] den Wert $2H$ durch Messungen an der Platte gewonnen. Der Wert, den man so erhält, ist jedoch keine Systemkonstante. Vielmehr ist er von der Lage der Meßstelle, von der Meßgröße (Spannung, Krümmung oder Durchbiegung) und von der Laststellung abhängig. Das liegt daran, daß

man mit der Huberschen Form die beiden neutralen Zonen für die ganze Platte konstant als Ebene festsetzt, während sie in Wirklichkeit wegen der Veränderlichkeit der Scheibenkräfte keine Ebenen sind.

Auf eine Arbeit von Pflüger [14] aufbauend, die die Stabilität der unsymmetrisch versteiften Platte zum Thema hat, gewinnt Trenks [15] zur Beschreibung von w eine Differentialgleichung 8. Ordnung. Der für die Lösung erforderliche Aufwand ist erheblich. Es werden für verschiedene Steifigkeitsverhältnisse die Ergebnisse mit denen verglichen, die man mit der Huber'schen Differentialgleichung bei verschiedenen Annahmen für die Drillsteifigkeit erhält.

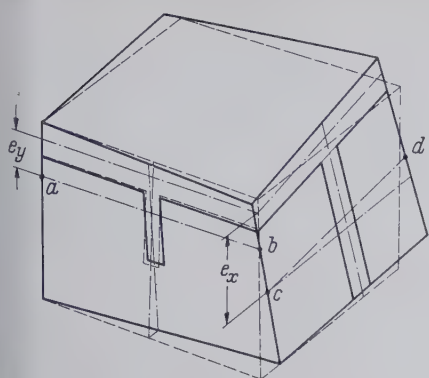


Bild 18. Einheitsverformungszustand $k_{xy} = 1$ bei Bezug der Schnittgrößen auf die Schwerlinien

tralen Faser die beiden Differentialgleichungen und gewinnt so einen Ausdruck für die „effektive Drillsteifigkeit“. Die Nulllinien legt er in die Schwerlinie des jeweiligen Gesamtplattenquerschnittes, d. h. im Abstand e_x und e_y von der Mittelebene der isotropen Platte. Der wirkliche Abstand ist jedoch kleiner als e_x und e_y , so daß die Drillsteifigkeit zu hoch ermittelt wird. Deshalb gibt Giencke noch eine Verbesserungsmöglichkeit an, in der die erhaltenen Näherungslösungen als „Belastungsfunktion“ in die genauen Differentialgleichungen eingesetzt werden. Massonet [11] gelangt zur Huber'schen Form dadurch, daß er die Lage der beiden Nulllinien über die Bedingung vom Minimum der Formänderungsarbeit bestimmt. Dazu muß er sich aber auch auf einen bestimmten Lastfall festlegen, für den er eine sinusförmige Linienlast quer über einen unendlich langen auf zwei Seiten gelenkig gelagerten Plattenstreifen wählt. Da er für das Aufstellen der Formänderungsenergie die Koeffizienten der Differentialgleichung bereits braucht, erhält er für die Lage der Nullebenen in den beiden Richtungen zwei Bestimmungsgleichungen, die durch Einsetzen von Schätzungswerten und Vergleich mit den erzielten Ergebnissen gelöst werden.

Alle diese Näherungen sind nur mit Vorbehalten anwendbar. Vor allem bei konzentrierten Lasten führen sie zu schlechten Ergebnissen, wenn man nicht die Möglichkeit hat, die Näherungsergebnisse durch Iteration in der exakten Differentialgleichung schrittweise zu verbessern oder bei der Ermittlung der Koeffizienten aus Meßergebnissen die Anwendung der Differentialgleichung auf die Umgebung der Meßstelle und die Meßgrößen zu beschränken, die für die Vergleichsrechnung benutzt wurde.

6. Zusammenfassung

Die Ableitung der Differentialgleichungen für anisotrope ebene Flächentragwerke wurde unter den beiden folgenden Gesichtspunkten durchgeführt:

Giencke [5] gelangt zu zwei gekoppelten Differentialgleichungen 4. Ordnung für die Durchbiegungen und die Scheibenkräfte, die einen Sonderfall unserer Gleichungen (28) darstellen und das Problem unter den ausführlich aufgezählten Voraussetzungen genau beschreiben. Um auf die Hubersche Form zu kommen, entkoppelt er durch eine Annahme über die Lage der neutralen Faser die beiden Differentialgleichungen und gewinnt so einen Ausdruck für die „effektive Drillsteifigkeit“. Die Nulllinien legt er in die Schwerlinie des jeweiligen Gesamtplattenquerschnittes, d. h. im Abstand e_x und e_y von der Mittelebene der isotropen Platte. Der wirkliche Abstand ist jedoch kleiner als e_x und e_y , so daß die Drillsteifigkeit zu hoch ermittelt wird. Deshalb gibt Giencke noch eine Verbesserungsmöglichkeit an, in der die erhaltenen Näherungslösungen als „Belastungsfunktion“ in die genauen Differentialgleichungen eingesetzt werden. Massonet [11] gelangt zur Huber'schen Form dadurch, daß er die Lage der beiden Nulllinien über die Bedingung vom Minimum der Formänderungsarbeit bestimmt. Dazu muß er sich aber auch auf einen bestimmten Lastfall festlegen, für den er eine sinusförmige Linienlast quer über einen unendlich langen auf zwei Seiten gelenkig gelagerten Plattenstreifen wählt. Da er für das Aufstellen der Formänderungsenergie die Koeffizienten der Differentialgleichung bereits braucht, erhält er für die Lage der Nullebenen in den beiden Richtungen zwei Bestimmungsgleichungen, die durch Einsetzen von Schätzungswerten und Vergleich mit den erzielten Ergebnissen gelöst werden.

1. Es sollte die mechanische Bedeutung sämtlicher Koeffizienten deutlich gemacht werden. So stellen sich die Koeffizienten der zur Mittelebene symmetrischen Scheibe gemäß Beziehung (2) als die Verformungskomponenten in den Einheitsbelastungszuständen dar. Bei der entsprechenden Platte waren es die Schnittgrößen in den Einheitsverformungszuständen (1). Fehlte die Symmetrie zur Mittelebene, so waren die Einheitszustände gemischter Art (17a), und zwar enthielten sie die Verformungsgrößen der Scheibe und die Schnittgrößen der Platte. Entsprechend stellten die Koeffizienten die Scheibenschnittgrößen und die Plattenverformungsgrößen in diesen gemischten Einheitszuständen dar.
2. Die Analogiebeziehungen zwischen Scheibe und Platte sollten klargelegt werden. Durch geeignete Bezeichnungsweise ließ sich die vollkommene mechanische und formale Analogie aufzeigen (Tafel I), die ihre großen Vorteile bei der unsymmetrischen Platte hat, wo die Scheiben- und Plattengrößen nicht mehr voneinander unabhängig sind.

An einigen praktisch wichtigen Beispielen wurde gezeigt, wie sich die Koeffizienten analytisch leicht bestimmen lassen. Der eindeutige Zusammenhang zwischen den Verformungs- und den Spannzahlen konnte mit großem Vorteil da ausgenutzt werden, wo zwar die Verformungszahlen gesucht sind, die Spannzahlen aber viel leichter ermittelt werden können.

Am Schluß stehen noch einige Bemerkungen zur näherungsweise Anwendung der Huber'schen Differentialgleichung auf die exzentrisch versteifte orthotrope Platte.

Schrifttum

- [1] Lexikon der Physik. S. 296, Stuttgart 1959, 2. Auflage.
- [2] Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik Bd. 3, Leipzig 1927.
- [3] Chwalla, E.: Über die Grundgleichungen der allgemeinen orthotropen Scheiben und Platten. Rendiconti e Pubblicazioni del Corso di Perfezionamento del Politecnico di Milano (1957) H. 7.
- [4] Mitchell, J. H.: Proc. Lond. math. Soc. Bd. 31 (1899) S. 100.
- [5] Giencke, E.: Die Grundgleichung für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen. Stahlbau 24 (1955) H. 6, S. 128/129.
- [6] Eßlinger, M.: Die orthotrope Scheibe. Stahlbau 28 (1959) H. 7, S. 183/87.
- [7] Love, A. E. H.: Mathematical Theorie of Elasticity. Cambridge 1934.
- [8] Braun, O.: Neues zur Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke. Stahlbau 25 (1956) H. 10, S. 236/45.
- [9] Berger, E. R.: Der Einfluß der Querdehnungszahl bei Platten, Bauingenieur 34 (1954) H. 9, S. 352.
- [10] Woynowski-Krieger: Zur Theorie schiefwinkliger Trägerroste. Ingenieur-Archiv 26 (1957) H. 5, S. 350/58.
- [11] Massonet, Ch.: Plaques et coques cylindriques orthotropes à nervures dissymétriques. Abhandlungen der IVBH 1959, 19. Bd. Zürich 1959.
- [12] Huber, M. T.: Die Theorie der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten nebst Anwendung. Bauingenieur 5 (1923) S. 354 und 392.
- [13] Cornelius, W.: Die Berechnung der ebenen Flächentragwerke mit Hilfe der Theorie der orthogonalanisotropen Platte. Stahlbau (1952) H. 2, S. 21 und H. 3, S. 41.
- [14] Pflüger, A.: Zum Beulproblem der anisotropen Rechteckplatte. Ingenieur-Archiv 16 (1947), S. 113.
- [15] Trenks, K.: Beitrag zur Berechnung orthogonal-anisotroper Rechteckplatten. Bauingenieur 34 (1954) H. 10, S. 372.

Die Stahlkonstruktion für das SM-Stahlwerk I der August-Thyssen-Hütte

Von Dr.-Ing. H. P. Witt, Dortmund und Obring, Wilhelm Winken, Duisburg-Hamborn

DK 624.94

Die in den ersten Jahren nach dem 2. Weltkrieg durchgeführte Demontage großer Teile der August-Thyssen-Hütte ermöglichte einen großzügigen Wiederaufbau der Thomas-, Martin- und Walzwerke. Wie wenig die Möglichkeit bestand, das Werk wieder so zu schaffen, wie es gewesen ist, geht schon aus den veränderten Anforderungen an die Walzprodukte hervor. Der Weg der Stahlerfornis, den die Kontingentierung während des Krieges gewiesen hatte, wurde aus rein wirtschaftlichen Gründen fortgesetzt. Immer stärker wurde der Ruf nach Leichtkonstruktionen. Der Bedarf verschob sich von Profilstählen zu Blechen und Breithändern. Hand in Hand damit und größtenteils sogar dadurch bedingt verlagerte sich die Erschmelzung des Stahls, die beim Thomasverfahren in Konvertern erfolgt, zum Siemens-Martin-Verfahren. Während die August-Thyssen-Hütte vor dem Kriege nur 23 % der Gesamtproduktion in Siemens-Martin-Stahl herstellte, beträgt der Anteil des SM-Stahles nach dem Neuaufbau des Werkes 50 %, wenn man die Windfrisch-Sonderstähle, die sogenannten verbesserten Konverterstähle, den Martinstählen zuschlägt. Von der Gesamtleistung von $2,4 \cdot 10^6$ t im Jahr sind etwa $1,1 \cdot 10^6$ t SM-Stähle.

Als erstes wurde 1950 das frühere Siemens-Martin-Werk II in seiner alten Form hergerichtet. Es besitzt eine jährliche Leistungsfähigkeit von 400 000 t. Ein neues Werk, das SM-Werk I, mit einer Jahresleistung von 700 000 bis 800 000 t und einer Ausbaufähigkeit auf 1 100 000 bis 1 200 000 t wurde 1955–1957 nach neuzeitlichen Gesichtspunkten erbaut.

Die stahlerzeugende Industrie des Ruhrgebiets hatte sich über der Kohle angesiedelt, um ihren am meisten transportbelasteten Rohstoff in möglichst größter Nähe zu haben. Dafür hat sie jetzt den Nachteil eingetauscht, auf beweglichem Grund bauen zu müssen. Die erste Frage beim Errichten von Hütten und Walzwerken über der Kohle ist daher stets: Welche Bewegungen wird der Baugrund voraussichtlich ausführen? Das Markscheideramt der Hamborner Bergbau AG. gab als Kennwerte für die Bodenbewegungen als größte zu erwartende Zerrungen 0,5 %, als größte Pressungen 0,25 % der Längen in jeder horizontalen Richtung an. Der kleinste voraussichtlich auftretende Krümmungsradius wurde mit 8000 m festgelegt. Er gilt sowohl für die positive und die negative Krümmung wie für die Längs- und die Querrichtung des Gebäudes.

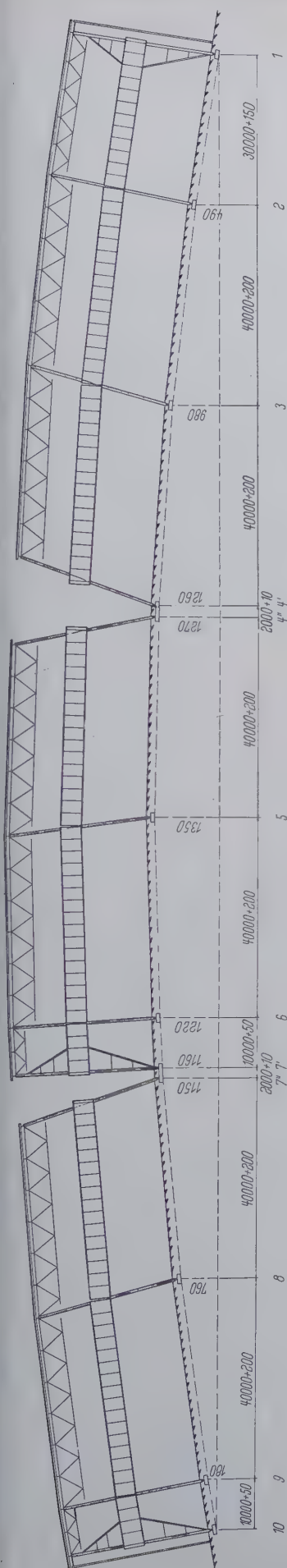


Bild 3. Verzerter gezeichneter Verschiebezustand des Hallenlängsschnitts

alle auf sie wirkenden Kräfte alleine aufnehmen. Eine allerdings unbedeutende Ausnahme ergibt sich nur an den Stützen C. Der untere Teil dieser Stützen wird — auch wenn man keine Verformungen aus der Erdbewegung berücksichtigt — von zwei Baugruppen belastet. Berücksichtigt man beim Ansatz der Kräfte und Momente — wie es allerdings nicht erforderlich und auch an keiner Stelle in der statischen Berechnung geschehen ist — die Fundamentbewegungen aus dem Kohleabbau, so erstrecken sich die Einflüsse der Stützenauflagerung C in geringem Maße über mehrere Felder zweier benachbarter Baugruppen (Bild 2). Praktisch hat dies jedoch keine Bedeutung.

Dagegen sind die Änderungen der Kranspurweiten, die sich aus der Erdbewegungen ergeben, von äußerster Wichtigkeit. Die Längsverschieblichkeit der Laufräder auf ihren Achsen und der Abstand der Spurkränze eines Laufrades sind nur begrenzt, und sie müssen es sein. Schwankt der Abstand der Kranschiene um ein größeres Maß als die sich aus der Konstruktion der Laufräder ergebende Toleranz, so schleifen die Spurkränze und die Verschleißscheiben an den Lagern ab. Es müssen neue Scheiben oder Räder eingebaut werden, wenn nicht sogar der Kran aus den Schienen springt. Daher steht die Ermittlung der Kranspurweitenänderungen bei der Beurteilung eines Hallensystems im Bergsenkungsgebiet an erster Stelle.

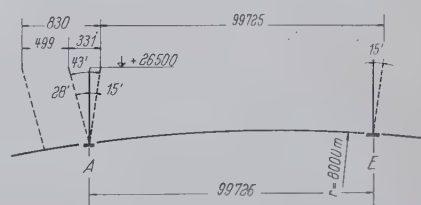
Das gewählte Querschnittssystem — und nur beim Querschnitt spielt der Abstand zweier Kranbahnträger eine Rolle — ist gegen Kranspurweitenänderung weitgehend unempfindlich. Lotrechte Stützenverschiebungen, auch unterschiedliche, haben bei dem System keinen Einfluß. Krümmungen der Erdoberfläche (in Sattel- oder Muldenform) wirken sich auf die Kranspurweiten nur in der Halle B...C, der Gleishalle, aus. Dort verkehren aber keine Krane, so daß auch die Biegeverformungen der Erdoberfläche den Kranbetrieb des Martinwerkes nicht stören. Es bleiben nur

die Zerrungen und Pressungen. Der Einfluß dieser Bodenverformungen geht aus den Kennwerten 0,5% für die Zerrungen und 0,25% für die Pressungen hervor. Er ist noch erträglich, weil die Spurweitenänderung der Krane immer nur einen Teil des Unterschieds der Stützenverschiebungen beträgt. Verhältnismäßig am stärksten wird das Hallenschiff E...F, die Stripperhalle, beeinflusst; nur in ihr verkehren zwei Krane übereinander.

Das Bild 2 läßt den zahlenmäßigen Einfluß erkennen, den die Bodenzerrungen und Pressungen auf die Kranspannweiten ausüben. Es sind Stützweitenänderungen bis zu 66 mm bei einer Kranbahn zu erwarten. Außerdem ist zu beachten, daß beide Kranbahnträger an einer Stütze gemeinsam verschoben werden müssen, wenn man die Verbände zwischen ihnen nicht durchtrennen will. Bei dieser Forderung ist die größte wahrscheinlich erforderlich werdende Verschiebung an der Stütze C $50 + 52 = 102$ mm. Mit der Verschiebungsmöglichkeit der Kranbahnträger von 100 mm auf der Stützenkonsole wird man also voraussichtlich auskommen, da die Lauftrachtkonstruktion für geringe Abweichungen der Spurweite eingerichtet ist. Um aber auch gewappnet zu sein, wenn größere Bewegungen auftreten sollten, ist noch das Ausrichten der Stützenfüße in zwei Richtungen vorbereitet. Obgleich die Halle bereits zwei Jahre in Betrieb ist, hat man bisher weder die Kranbahnträger noch die Stützenfüße auszurichten brauchen.

Ebenfalls von großer Wichtigkeit ist die Frage nach den Bewegungen der einzelnen sechs Baublöcke gegeneinander. Die Antwort ergibt sich aus den Kennwerten der Bodenbewegung in Verbindung mit dem gewählten System. Man muß zwischen den Fugen im Quer- und im Längsschnitt unterscheiden. Der Querschnitt hat nur eine entscheidende Fuge, die zudem nur im Dach erscheint. In ihr wirkt sich die Zerrung und Pressung von 99,725 m zwischen den eingespannten Stützen A und E mit 499 mm Verlängerung und 249 mm Verkürzung aus. Hinzu kommt der Unterschied der Neigungen dieser Stützen bei einem Krümmungsradius von ± 8000 m. Diese Differenz beträgt $\pm 43'$ oder $\pm 1:80,2$. Bei der Höhe des Dachbolzens (bezogen auf die Unterkante des Stützenfußes) von 26,5 m erhält man aus der ungestörten Lage heraus ein Öffnen der Fuge von $+499 \text{ mm} + 26500 \text{ mm} \cdot \tan 43' = 499 \text{ mm} + 331 \text{ mm} = 830 \text{ mm}$ (Bild 4) und ein Schließen von $-249 \text{ mm} - 26500 \text{ mm} \cdot \tan 43' = -249 \text{ mm} - 331 \text{ mm} = -580 \text{ mm}$.

Bewegung an der Fuge im Querschnitt



Bewegung der Fuge im Längsschnitt

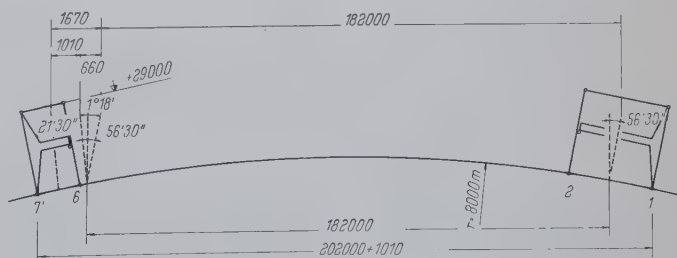


Bild 4. Bewegungen im Hallenquerschnitt und -längsschnitt aus Bodenzerrungen und -krümmungen

In der Längsrichtung des Gebäudes sind Fugen zwischen den Stützen 4' und 4'' sowie zwischen 7' und 7'' vorgesehen. Da die Festpunkte 1, 7' und 10 Abstände von 202 m und 92 m haben, ergeben sich Abstandsänderungen aus den Zerrungen von 1010 mm und 460 mm sowie aus den Pressungen von -500 mm und -230 mm . Für die Ermittlung der Neigungen sind die Schwerpunktsabstände der Festfelder maßgebend. Sie sind 182 m und 92 m. Die Neigungs-

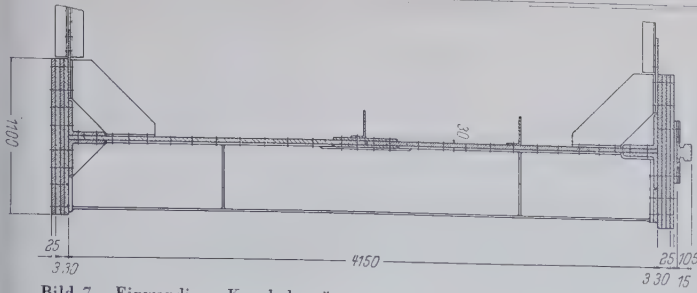


Bild 7. Einwandiger Kranbahnträger von 40 m Stützweite (Gießhalle)

net, den Rahmen im Innern des Kranträgerkastens unzulässig engen. Sieht man aber dieses Stegblech über dem Obergurt vor und stützt es auf den Schotten des Kranbahnträgers ab, so drängt man den Obergurt von der Faser der stärksten Beanspruchung in Richtung auf die Nulllinie ab. Man erhält eine statisch ungünstige Konstruktion. Wählt man endlich den Weg, die Schiene auf Querschwellen zu lagern, muß der Schwellenabstand sehr eng werden, gleichgültig, ob man die Querkonstruktion auf oder unter die Obergurtlamellen legt. Man hat daher den Mut zur einfachsten Lösung aufgebracht und Recht daran getan.



Bild 8. Nördliche Giebelwand des SM-Stahlwerks I der August-Thyssen-Hütte

der Trägermitte ist dann nur unbefriedigend durchzuführen. Legt man die Schiene in die Mitte zwischen die beiden Stegbleche direkt auf die Obergurtlamellen, so biegen sich die Lamellen in der Querrichtung zu sehr durch. Ein drittes Stegblech unter der Schiene würde, unter der Obergurtlamelle angeord-

Bild 8 zeigt die nördliche Giebelwand des fertigen Bauwerks. Die konstruktive, statische und zeichnerische Bearbeitung der Stahlkonstruktion wurde von der Rheinstahl UNION Brückenbau AG. durchgeführt. An der Lieferung und Montage der Stahlkonstruktion waren mehrere westdeutsche Firmen beteiligt.

Die Berechnung von Hohlrippenplatten

Von Dr.-Ing. Ernst Giенке, Darmstadt

DK 624.21.095.5 : 624.073

(Schluß aus Heft 1/1960)

3.3 Explizite Bestimmung der Entwicklungsfunktionen $\varphi(x)$

Um die in den vorigen Abschnitten abgeleiteten Beziehungen für die Berechnung einer Fahrbahnplatte auswerten zu können, müssen wir die zugehörigen Entwicklungsfunktionen $\varphi(x)$ explizit angeben. Da die Fahrbahnplatten immer über sehr viele Querträger durchlaufen — für die Rechnung können wir, ohne daß die Genauigkeit der Ergebnisse darunter leidet, die Platte bis ins Unendliche ausdehnen —, wird es also unsere Aufgabe sein, Eigenfunktionen für einen Druckstab mit unendlich vielen elastischen Stützen zu finden. Die Größe der Federkonstante der Stützen, die von der Steifigkeit der Querträger abhängt, ist durch Gleichung (3.45) [im Sonderfall gelenkig gelagerter Querträger durch Gleichung (3.36)] gegeben.

Wird in eine Durchlaufplatte eine Radlast eingeleitet (Bild 11), so wird sich ein Spannungszustand einstellen, der mit zunehmender

Entfernung von der Lasteinleitungsstelle abklingt. Zur Berechnung solcher Spannungszustände braucht man auch abklingende Entwicklungsfunktionen.

Die Eigenfunktionen eines Knickstabes über unendlich viele Stützen verlaufen periodisch über den ganzen Stab und klingen nicht ab. Diese Schwierigkeit läßt sich aber umgehen, indem wir über das Verhalten der unbelasteten Felder eine Näherungsannahme machen.

Wir betrachten dazu noch einmal Bild 11. Greift in einem Felde einer Durchlaufplatte eine konzentrierte Flächenlast an, deren Ausdehnung klein ist gegenüber der Feldweite, (z. B. die Radlast des Schwerlastwagens nach DIN 1072), so wird sich in der Nähe der Last eine tiefe Mulde ausbilden, die nach den Rändern hin schnell abklingt. Dabei wird sich die Platte in der Nähe der Last sehr stark verwinden, so daß dort ein wesentlicher Teil der Belastung durch die Torsionsmomente seitlich abgetragen wird. Mit zunehmender x -Entfernung von der Last klingt aber die elastische Verwindung der Platte so schnell ab, daß die in den Nachbaröffnungen entstehenden Torsionsmomente auf das Kräftespiel praktisch keinen Einfluß haben. Wir werden daher gute Ergebnisse erwarten können, wenn wir die Torsionssteifigkeit der Rippen bei einer Platte mit starren Querträgern nur in den belasteten Feldern und bei einer Platte mit elastischen Querträgern höchstens noch in deren Nachbarfeldern berücksichtigen und in den übrigen Öffnungen lediglich die Biegesteifigkeit der Rippen beibehalten. Dadurch wird auch das zugehörige Knickproblem, das zur Auffindung der Entwicklungsfunktionen gelöst werden muß, einfacher, denn, wo die Torsionssteifigkeit vernachlässigt wird, braucht auch keine Druckkraft angenommen zu werden. Für dieses vereinfachte System erhält man abklingende Eigenfunktionen; da nur die auf Druck belasteten Felder eine Tendenz zum Ausknicken haben, beschränkt sich die Knickfigur im wesentlichen auf diese Felder und klingt in den unbelasteten Öffnungen schnell ab.

3.31 Starre Querträger

Damit das Wesentliche der Rechnung klar zum Ausdruck kommt, wollen wir zunächst für den „starren“ Fall die Entwicklungsfunktionen bestimmen. Für das größte Feldmoment ist normaler-

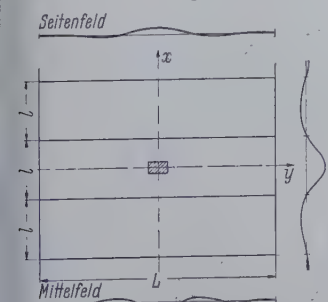


Bild 11. Biegefläche einer Durchlaufplatte infolge einer Radlast

weise nur das betreffende Feld zu belasten, denn nach DIN 1072 dürfen entlastende Radlasten nicht berücksichtigt werden. Wenn wir die Torsionssteifigkeit in den unbelasteten Feldern vernachlässigen, erhalten wir als vereinfachtes System eine elastisch ein-

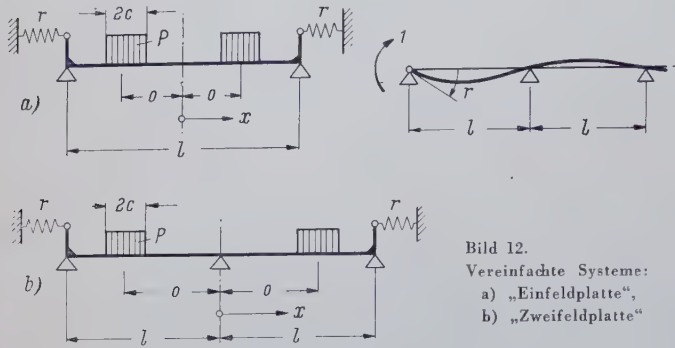


Bild 12.
Vereinfachte Systeme:
a) „Einfeldplatte“,
b) „Zweifeldplatte“

gespannte Einfeldplatte (Bild 12 a). Die Einspannkonstante r muß so gewählt werden, daß sie den Einspanngrad eines Balkens auf unendlich vielen Stützen wiedergibt (Bild 12 a):

$$r = \frac{l}{2\sqrt{3}B_x} \quad (3.53)$$

Da nur die symmetrische Lastgruppe ein Feldmoment liefert (Bild 16), brauchen wir nur die symmetrische Eigenfunktion zu ermitteln. D. h. von der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (3.4)

$$\varphi(x) = A \cos \xi + B \sin \xi + C \xi + D \quad \text{mit } \xi = \alpha \frac{x}{l} \quad (3.54)$$

benötigen wir nur den symmetrischen Anteil

$$\varphi = \cos \xi - \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \varphi'' = -\left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \cos \xi, \quad \dots \quad (3.55)$$

wobei die Konstante D gleich so gewählt ist, daß $\varphi(l) = 0$ (starre Lagerung) ist. Aus der Bedingung für die elastische Einspannung am Rande

$$\varphi'\left(\frac{l}{2}\right) = rM\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{\alpha}{2\sqrt{3}} \varphi''\left(\frac{l}{2}\right)$$

erhält man die Eigenwertgleichung

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{\alpha}{2\sqrt{3}} \quad (3.56)$$

Mit dem Integralwert

$$\int \varphi \varphi'' dx = -\frac{\alpha^2}{2l} \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}\right)$$

wird für den Lastfall Bild 12 a

$$p\varphi'' = -\frac{\int p\varphi dx}{\int \varphi \varphi'' dx} \varphi'' = \frac{4P}{l} \frac{\frac{\sin \gamma}{\gamma} \cos \omega - \cos \frac{\alpha}{2}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}} \cos \xi \quad (3.57)$$

Die wichtigsten Zahlenwerte für diese Eigenfunktionen sind in Tafel 4 a zusammengestellt.

Das größte Stützmoment ergibt sich, wenn die beiden der Stütze benachbarten Felder belastet sind, wir brauchen daher zur Bestimmung des Stützmomentes die Torsionssteifigkeit nur in diesen beiden Feldern berücksichtigen und erhalten das in Bild 12 b dargestellte vereinfachte System; die Einspannkonstante r ist durch Gleichung (3.53) gegeben. Wieder brauchen wir auch in diesem Falle nur die symmetrischen Eigenfunktionen zu ermitteln. Wir setzen die Eigenfunktion in der allgemeinen Form (3.54) an, wobei x von der Mittelstütze aus gezählt wird. Auf Grund der Bedingungen an der Innenstütze — $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ — und an den Enden — $\varphi(l) = 0$, $\varphi'(l) = rM_x(l) = -\frac{l}{2\sqrt{3}} \varphi''(l)$ — erhält man die Eigenwertgleichung

$$1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 2\sqrt{3} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\alpha}\right) \quad (3.58)$$

und die Entwicklungsfunktion

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 1 - \cos \xi - \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha} (\xi - \sin \xi) \\ \varphi'' &= \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \left(\cos \xi - \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha} \sin \xi\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

Für den in Bild 12 b angegebenen Lastfall gilt

$$p\varphi'' = -\frac{2P}{l} \frac{1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma} \cos \omega - \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha} \omega \left(1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma} \cdot \frac{\sin \omega}{\omega}\right)}{1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\alpha - \sin \alpha}\right)^2} \times \left(\cos \xi - \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha} \sin \xi\right) \quad (3.60)$$

Die wichtigsten Zahlenwerte sind in Tafel 4 b zusammengestellt.

Abschließend wollen wir noch bemerken, daß man mit diesen einfachen Funktionen auch Lasten in den Außenöffnungen erfassen kann. Dazu muß man den Verlauf der Funktionen φ in diesen Öffnungen berechnen (Balkenstatik) und dann bei der Bestimmung des Lastkoeffizienten (3.9) das Integral $\int p\varphi dx$ auch auf diese Öffnungen erstrecken.

3.32 Elastische Querträger

Obwohl sich die Platte infolge der Querträgerelastizität in x -Richtung großwellig — über mehrere Felder hinweg — durchbiegt (Bild 10), genügt es in den meisten Fällen, wenn für die Bestimmung des Einflusses der Querträgerelastizität auch die Torsionssteifigkeit nur in den belasteten Feldern berücksichtigen.

Denn bei den Platten mit kleinem Seitenverhältnis $\frac{l}{L}$ (Normalfall) werden die Korrekturmomente infolge der Querträgerelastizität nur wenig durch die Torsionssteifigkeit beeinflusst, so daß man mit einer etwas größeren Näherung auskommt, und bei Platten mit großem Seitenverhältnis $\frac{l}{L}$ ist der Einfluß der Kontinuität an den Nachbarquerträger sehr klein, wie in [4] gezeigt ist, so daß es nicht auf eine genaue Erfüllung der Übergangsbedingungen ankommt.

Zur Bestimmung der Korrekturmomente haben wir in Querrichtung nach den Eigenfunktionen ψ des schwingenden Balkens entwickelt und in Längsrichtung nach den Eigenfunktionen φ des Knickstabes, die für ein symmetrisch belastetes Innenfeld einer Platte über unendlich viele Querträger (Bild 13) die Form

$$\varphi = \cos \xi + D, \quad \varphi'' = -\left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \cos \xi \quad (3.61)$$

haben. Für jede Funktion ψ_n erhält man ein eigenes System von Funktionen φ_{mn} , da der Eigenwert k_n der Funktion ψ_n in die Randbedingungen für die Funktionen φ_{mn} eingeht (s. Abschnitt 3.2). Die Konstante D und die Eigenwertgleichung finden wir aus den Übergangsbedingungen an dem ersten Querträger. Das belastete Mittelfeld der Platte gibt an die Außenfelder das Moment M_n und die Querkraft Q_n ab (Bild 13). (Der Index n gibt an, daß es sich

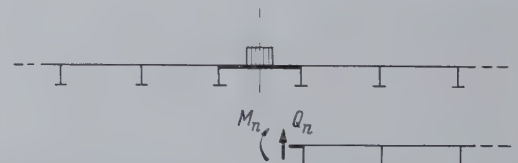


Bild 13. Innenfeld einer Platte auf unendlich vielen Querträgern

um die n -te Welle der Entwicklung in y -Richtung handelt.) Wenn man in den Außenfeldern die Torsionssteifigkeit vernachlässigt, entfällt auf den ersten Querträger die Last

$$C_n = EJ_Q w_n'''' = -\frac{M_n}{l} \cdot \frac{4}{1 + \alpha' + \beta'} - Q_n \cdot \frac{2\beta'}{1 + \alpha' + \beta'}$$

und neigt sich der Plattenquerschnitt über dem Querträger um

$$w_n' = \frac{M_n l}{6B_x} \cdot \frac{1 + 3\alpha'(1 + \beta')}{1 + \alpha' + \beta'} + \frac{Q_n l^2}{B_x} \cdot \frac{4\Phi}{1 + \alpha' + \beta'}$$

Die Größen α' und β' hängen alle von der Querträgerelastizitätszahl Φ ab (Tafel 1).

Wenn man nun beachtet, daß $EJ_Q w_n'''' = k_n^4 I B_y \psi_n \varphi$, $w_n' = \psi_n \varphi$, $M_n = -B_x w_n'' = -B_x \psi_n \varphi''$ und $Q_n = -B_x w_n''' = -B_x \psi_n \varphi'''$ ist (von der gesamten Querkraft haben wir nur den Anteil $Q_n = M_n'$, den die Durchlaufplatte an die Querträger abgibt — Ab



Überall wo geschweisst wird...

Metallogen



der blaue Blitz

DIE  SCHNELLFLUSS-ELEKTRODE



Es muß nicht immer die Musik sein,
 die sich der Farbe des Klanges bedient.
 Auch in der Technik faßt der Brauch immer mehr Fuß,
 durch Farbe die strenge Sachlichkeit technischer Güter aufzulockern.
 Abgesehen davon aber erfüllt bei der

ELEKTRODE IN BLAU

Metallogen USS (TiVllls)

dieser Farbstoff noch einen anderen Zweck. Mehr verraten wir hierüber nicht, sondern wir empfehlen Ihnen, sich ernsthaft auch mit diesem Elektrodentyp auseinanderzusetzen. Denn
ÜBERALL WO GESCHWEISST WIRD...

sollte man sich der Vorteile dieser *Metallogen*-Elektrode bedienen.

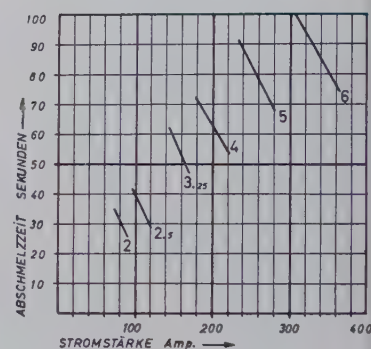
Sie ist eine stark-ummantelte

SCHNELLFLUSS-AKKORD-ELEKTRODE

sowohl mit Gleich- als auch mit Wechselstrom zu verschweißen.

- Höchste Abschmelzgeschwindigkeit und hohe Strombelastbarkeit, daher ausgezeichnete Akkordleistung.
- Keine Reizung der Atmungsorgane durch schädlichen Qualm!
- Leichtflüssige, glasig erstarrende Schlacke, auch bei schmalster Naht stets gleichmäßig nachkommend.
- Trotz leichtfließender Schlacke ist die Möglichkeit zur Stauchung der Naht gegeben. Schlacke auch im spitzen Winkel sehr leicht entfernenbar.
- Sehr saubere, schön gezeichnete Naht.
- Hervorragende und leichte Verschweißbarkeit in Zwangslagen.
- Ausgezeichnete Gütewerte auch bei Wechselbeanspruchungen.

Diese besonderen Eigenschaften besitzt die Elektrode in Blau bei Verbindungsschweißungen im Apparate- und Behälterbau, im Konstruktions- und Brückenbau, im Fahrzeug- und Maschinenbau, für Kessel und Rohrleitungen.



Abschmelzzeiten für
Metallogen USS

Ausbringen 95%

STROMART · STROMSTÄRKE

Wechselstrom und Gleichstrom (Minuspol)						
2,00	2,50	3,25	4,00	5,00	6,00	mm
75/90	100/120	145/170	190/220	240/280	310/360	10
						Amp.

GÜTEWERTE

Festigkeit kg/mm ²	Streckgrenze kg/mm ²	Dehnung (l → 5 d) %	Einschnürung %	Kerbschlag- zähigkeit kgm/cm ²	Brinellhärte H B (10/3000)	Biegewinkel Grad
48/55	38/43	30	65	12/14	140/160	180

EIGNUNG für Werkstoffe wie:

St 34/37/42/52; St 35.29/45.29; GS 38/45/52; S 1/11/III; Kesselbleche I, II, III.

GÜTEPRÜFUNGEN

DB E 34 z, E 37 z, E 52 z, Germanischer Lloyd.



Metallogen

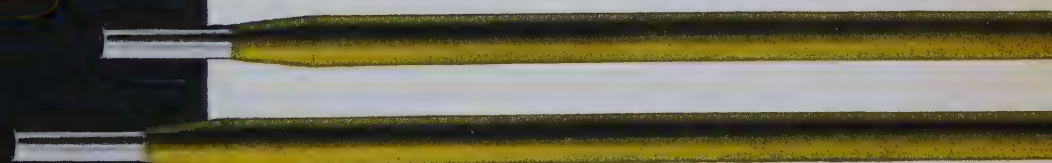
GESELLSCHAFT FÜR SCHWEISSTECHNIK
 UND WERKSTOFFSCHUTZ M. B. H.

WATTENSCHIED IN WESTF. · RUF 8403/81403 · POSTFACH 145



Überall wo geschweisst wird ...

Metallogen



der blonde Typ

**KOMBINATIONS-DACHNAHT/
HOHLKEHL-ELEKTRODE**

DIE

neue

Nicht nur in der Musik
zwingt die Farbe des Klanges
den Hörer in ihren Bann.

Auch unsere

ELEKTRODE IN GELB

wird alle begeistern, die ihre Vorteile kennen!

ÜBERALL WO GESCHWEISST WIRD...

sollte man daher diese Elektrode auf ihre Einsatzmöglichkeit prüfen,

denn sie wird den Neid aller erwecken, die sie nicht verwenden!

Metallogen

US 49-VAM

(Ti VIII)s

ist eine

KOMBINATIONS-DACHNAHT/HOHLKEHL-ELEKTRODE

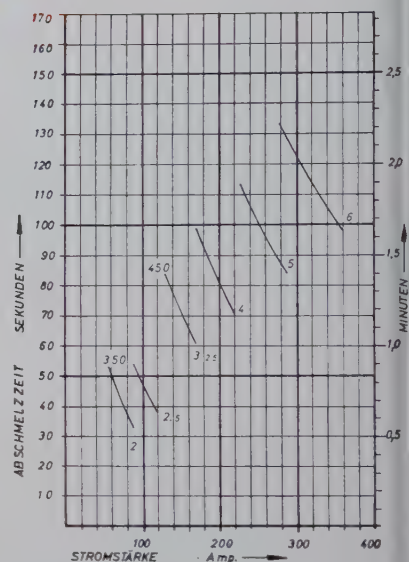
die mit Gleich- und Wechselstrom verschweißt werden kann,

sie ist eine Abwandlung unserer bekannten *Metallogen* US 49 - V

mit speziellen Einsatzmöglichkeiten.

IHRE VORTEILE:

- Glatte, chromglänzende Kehlnähte im T-, Winkel- und Bördelstoß.
- Große Auszuglängen
- Leichte Verschweißbarkeit in Zwangslagen
- Spritzer- und Geräuscharmer Ablauf
- Beste Schlackenentfernbarkeit
- Geringe Qualmentwicklung
- Ausgezeichnete mechanische Güterwerte



Abschmelzzeiten für
Metallogen US 49-VAM

Ausbringen 94 %

STROMART · STROMSTARKE

Wechselstrom- und Gleichstrom (Minuspole)							
1,50	2,00	2,50	3,25	4,00	5,00	6,00	mm ↻
40/50	60/80	80/100	130/150	170/200	220/260	270/310	Amp.

GÜTERWERTE

Festigkeit kg/mm ²	Streckgrenze kg/mm ²	Dehnung (l = 5 d) %	Einschnürung %	Kerbschlag- zähigkeit kgm/cm ²	Brinellhärte HB (10/3000)	Biegewinkel Grad
48/52	40/44	24/28	65	10/13	170/190	180

EIGNUNG für Werkstoffe wie:

St 34/37/42/52; St 35.29/45.29/55.29; GS 38/45/52; S 1/II/III.

BEDINGUNGEN z. B.

DB E 34 z/37 z/52 z; Germanischer Lloyd



Metallogen

GESELLSCHAFT FÜR SCHWEISSTECHNIK
UND WERKSTOFFSCHUTZ M. B. H.

WATTENSCHIED IN WESTF. · RUF 8403/81403 · POSTFACH 145

schnitt 3.13 —, eingesetzt), ergeben sich die Randbedingungen $\varphi = \left(\frac{l}{2}\right)$ für die Funktion φ

$$\varphi = \frac{4\Phi l^2}{1 + \alpha' + \beta'} \varphi'' + \frac{2\Phi \beta' l^3}{1 + \alpha' + \beta'} \varphi'''$$
$$\varphi' = \frac{1 + 3\alpha'(1 + \beta')l}{6(1 + \alpha' + \beta')} \varphi'' - \frac{4\Phi l^2}{1 + \alpha' + \beta'} \varphi'''.$$

Diese Randbedingungen erfüllen an sich nicht die Bedingung (3.6) für die Orthogonalitätsrelation (3.5) der Funktionen φ . Da aber nur eine „belastete Orthogonalität“ vorliegt, lassen sich die Gleichungen ohne Schwierigkeit orthogonalisieren.

Aus der Gleichung für φ' folgt die Eigenwertgleichung

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = - \frac{1 + 3\alpha'(1 + \beta')}{6(1 + \alpha' + \beta')} \cdot \frac{\alpha}{1 - \frac{4\Phi \alpha^2}{1 + \alpha' + \beta'}} \quad (3.62)$$

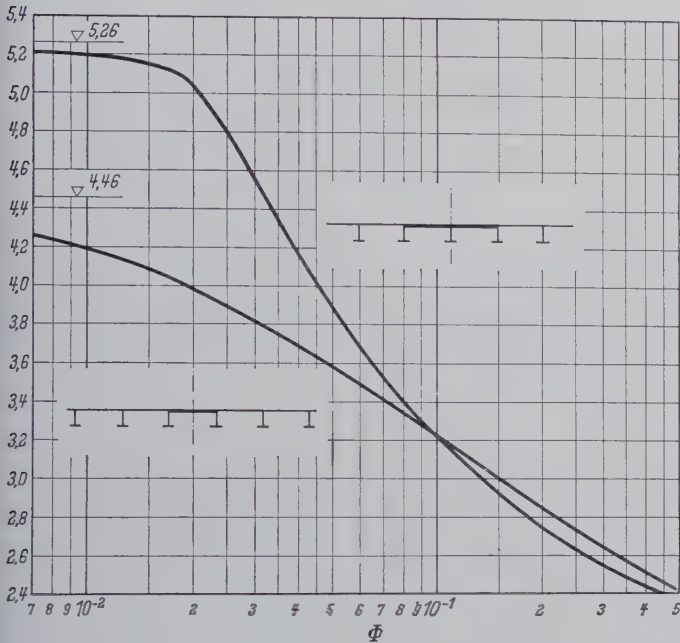


Bild 14. Eigenwerte α

In Bild 14 kann man die Eigenwerte α für die Werte von Φ , die im Brückenbau vorkommen, ablesen. Außerdem sind in diesem Bild auch die Werte für eine „Zweifeldplatte“, die für die Berechnung der Stützmomente gebraucht werden, eingetragen.

3.3 Lösung mit periodischen Systemen

Aber auch periodische Systeme kann man zur Berechnung der Durchlaufplatten benutzen. Z. B. verhält sich im Lastfall nach Bild 15 a jede Öffnung wie ein Balken auf zwei Stützen und im

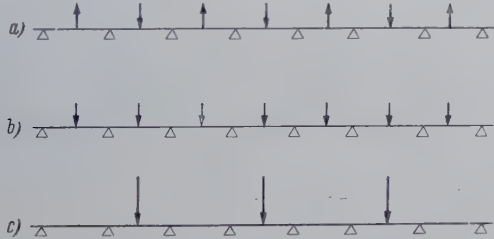


Bild 15. Überlagerung periodischer Kräftesysteme

Lastfälle nach Bild 15 b wie ein eingespannter Balken. Durch die Überlagerung beider Lastfälle erhält man wieder einen periodischen Lastfall. Da die Spannungszustände bei dem Lasteinleitungsproblem, wie es vom Balken her bekannt ist, sehr schnell abklingen, können wir durch geeignete Wahl eines periodischen Kräftesystems den wirklichen Spannungszustand in der Nähe der Last mit beliebiger Genauigkeit bestimmen.

Für die Bestimmung des Feldmomentes zerlegen wir die Belastung in eine (zur Feldmitte) symmetrische und eine antisymmetrische Lastgruppe (Bild 16 a). Wir brauchen dann nur den

symmetrischen Lastfall zu untersuchen, da sich nur in diesem Falle ein Feldmoment ergibt. Überlagert man die beiden Lastfälle nach Bild 16 b u. c, so erhält man schon recht gute Ergebnisse. Ein Vergleich für den Balkenfall zeigt, daß sich im Lastfall „Einzellast in Feldmitte“ Abweichungen um ein Prozent ergeben für den Bereich der Federkonstanten, in dem die Elastizitätszahlen der Querträger bei den Fahrbahnplatten normalerweise liegen. Die Abweichungen sind bei unserer Plattenrechnung kleiner, da wir die periodischen Systeme nur zur Ermittlung des Einflusses der Torsionssteifigkeit benutzen. Noch genauere Ergebnisse erhält man, wenn man dem Kräftesystem nach Bild 16 d noch ein alternierendes überlagert, weil dann nur jedes achte Feld belastet ist.

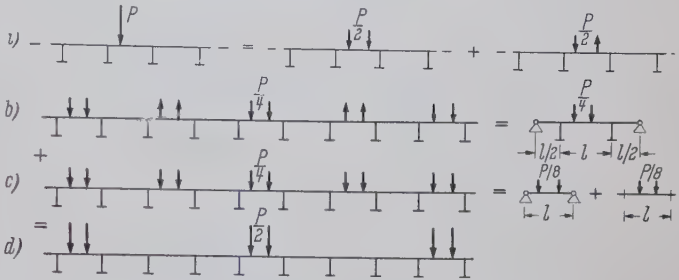


Bild 16. Periodisches System für das Feldmoment

Auf den Antimetrieachsen verschwinden Biegemoment und Durchbiegung wie bei der gelenkigen Lagerung (Bild 16 b). Im Lastfälle nach Bild 16 c senken sich alle Stützen gleichmäßig durch, so daß man die Rechnung für starre Stützen durchführen kann, wie in den beiden Figuren angedeutet ist. Hier zeigt sich deutlich, wie vorteilhaft es ist, die Momente für die starrgestützte Platte für sich zu bestimmen. Denn wir brauchen dann für die Zusatzmomente infolge der Querträgerelastizität nur die periodischen Systeme durchzurechnen, in denen elastische Stützen vorkommen, d. h. von den drei Teilsystemen für das Feldmoment nur das eine nach Bild 16 b. Das gilt sinngemäß auch für die folgenden Systeme.

Für die Bestimmung des Stützmomentes kann man analog vorgehen. Dabei braucht nur die zur fraglichen Stütze symmetrische Lastgruppe untersucht zu werden (Bild 17 a), da nur diese ein Stützmoment liefert. In Bild 17 b ist ein periodisches Kräftesystem dargestellt, in dem man für einen Balken das Stützmoment mit einer Genauigkeit von ein Prozent erhält. In dem gleichen Bild sind auch die entsprechenden Teilsysteme angegeben.

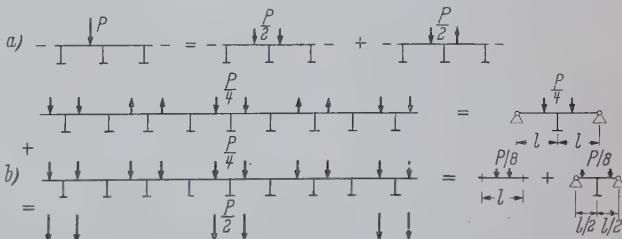




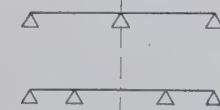
Bild 17. Periodisches System für das Stützmoment

Für die in den Bildern 12, 13, 16 und 17 aufgeführten Systeme sind die Bedingungen (3.6) für die Orthogonalitätsrelation (3.5) erfüllt. Die Eigenfunktionen, die Eigenwertgleichungen und die wichtigsten Lastkoeffizienten für diese Systeme sind in Tafel 5 zusammengestellt.

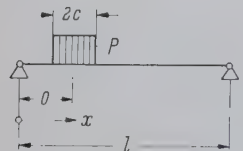
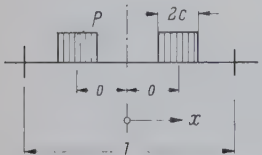
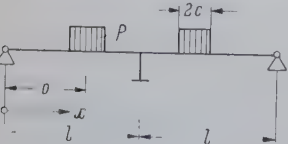
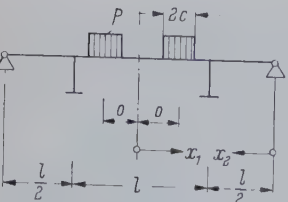
4. Einfluß der Exzentrizität der Hohlrippen

Den Einfluß der Exzentrizität ermitteln wir an Hand der vereinfachten Gleichungen (2.30)–(2.32), in denen die Biegemomente und die Dehnung der Plattenfläche in Querrichtung vernachlässigt sind. Nur so erhalten wir Ergebnisse, die sich gut diskutieren lassen. Wie bei der Platte mit symmetrischen Steifen bestimmen wir zuerst die Momente für die Platte mit starren Querträgern und anschließend die Korrektur für die Querträgerelastizität. Diese Aufteilung hat den Vorteil, daß wir im „starken Fall“ mit einem eingliedrigem Ansatz [s. Gleichung (3.10)] auskommen und nur für die Korrektur eine Doppelreihe auswerten müssen.

Tafel 4. Zahlenwerte der Entwicklungsfunktionen $\varphi(x)$ für starre Querträger

System, Eigenwertgleichung		Zahlenwerte					
 $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2\sqrt{3}}$	1	2	3	4			
	m	α	$1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}$	$\cos \frac{\alpha}{2}$			
	1 2 3 4	4,46 10,09 16,13 7π	1,217 1,061 1,025 1,0	-0,613 0,3242 -0,2096 0			
 $1 - \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 2\sqrt{3} \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)$	1	2	3	4	5	6	
	m	α	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\frac{\alpha}{2}$	$\cos \frac{\alpha}{2}$	
	1 2 3	5,26 8,031 11,251	0,520 -0,176 0,2524	-0,854 0,984 -0,967	2,63 4,016 5,626	-0,872 -0,642 0,791	
	7	8	9		10	11	
	m	$\sin \frac{\alpha}{2}$	$1 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\alpha - \sin \alpha} \right)^2$		$\frac{1 - \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha}$	$\frac{1 - \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha} \cdot \frac{\alpha}{2}$	
 $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$	1	2	3	4	5	6	7
	m	α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin^2 \alpha$	$\sin \frac{\alpha}{2}$	$\cos \frac{\alpha}{2}$
	1 2 3 m	4,493 7,725 $\frac{(2m+1)}{2}\pi$	0,976 0,992 ± 1	0,217 0,1284 0	0,952 0,986 1	0,780 -0,660	-0,626 -0,751 $\pm 0,707$

Tafel 5. Entwicklungsfunktionen $\varphi(x)$

System Lastfall	Entwicklungsfunktionen	Eigenwerte	Lastkoeffizient $p_m \varphi_m''$
	$\varphi = \sin \xi$ $\varphi'' = -\left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \sin \xi$	$\alpha = m \pi$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{2 P}{l} \cdot \frac{\sin \gamma}{\gamma} \sin \omega \cdot \sin \xi$
	$\varphi = \cos \xi - \cos \frac{\alpha}{2}$ $\varphi'' = -\left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \cos \xi$	$\sin \frac{\alpha}{2} = 0$ $\alpha = 2 m \pi$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{4 P}{l} \cdot \left(\frac{\sin \gamma}{\gamma} \cos \omega - \cos \frac{\alpha}{2}\right) \cos \xi$
	$\varphi = \sin \xi \cdot \frac{x}{l} \cdot \frac{\sin \alpha}{1 - 2 \alpha^2 \Phi}$ $\varphi'' = -\left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \sin \xi$	$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \alpha^2 \Phi$	$\frac{2 P}{l} \cdot \frac{\sin \gamma}{\gamma} \sin \omega - \frac{o}{l} \cdot \frac{\sin \alpha}{1 - 2 \alpha^2 \Phi} \sin \xi$
	$\varphi_1 + \cos \xi_1 = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 - 2 \alpha^2 \Phi}$ $\varphi_1'' = -\left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \cos \xi_1$ $\varphi_2 = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \left(\sin \xi_2 - \frac{2 x_2}{l} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{1 - 2 \alpha^2 \Phi} \right)$ $\varphi_2'' = -\left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \sin \xi_2$		$\frac{4 P}{l} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\sin \gamma}{\gamma} \cos \omega - \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 - 2 \alpha^2 \Phi} \right)}{\sin^2 \alpha + 6 \alpha^2 \Phi \cos^2 \alpha} \cos \xi_1$
Abk.: $\xi = \frac{\alpha x}{l}$, $\gamma = \frac{\alpha c}{l}$, $\omega = \frac{\alpha o}{l}$			

1. Starre Querträger

Die Gleichungen für die Platte lauten, wenn wir den erweiterten Ansatz (3.10)

$$\begin{aligned} M &= \sum M_m(y) \varphi_m''(x), \quad N = \sum N_m(y) \varphi_m''(x) \\ \chi &= \sum \chi_m(y) \varphi_m(x), \quad p = \sum p_m(y) \varphi_m''(x) \end{aligned} \quad (4.1)$$

einsetzen und die Beziehung (3.11) für die Funktionen φ beachten,

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 M + \frac{2B}{B_x} M'' - B_{xy} \chi' - \left(e_x - \frac{\varrho}{1+\varrho} \cdot \frac{\mathfrak{F}}{a}\right) \cdot \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 N &= -p, \\ -2 \left(\frac{1+\frac{a_1}{a}\varrho}{(1+\varrho)}\right) \cdot \frac{D_x}{D} \cdot \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 N + N'' - e_x \cdot \frac{D_x}{B_x} M'' - \frac{\varrho}{1+\varrho} \cdot \frac{\mathfrak{F}}{a} D_x \chi' &= 0, \\ \chi' \left[1 + \frac{B_{xy}}{K_{xy}} \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2\right] &= -\frac{M''}{B_x} + \frac{\varrho}{1+\varrho} \cdot \frac{\mathfrak{F}}{a} \cdot \frac{1}{K_{xy}} \cdot \left(\frac{\alpha}{l}\right)^4 N. \end{aligned}$$

Wobei haben wir zur Schreibereleichterung den Index m weggelassen. Nach Elimination von χ ergeben sich mit den Abkürzungen für die Torsionssteifigkeit

$$H = 2B + \frac{B_{xy}}{1 + \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \cdot \frac{B_{xy}}{K_{xy}}}, \quad (3.14)$$

für die Schubsteifigkeit

$$\gamma = \frac{1+\varrho}{1+\frac{a_1}{a}\varrho} \cdot \frac{D}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\varrho}{1+\varrho} \cdot \frac{\mathfrak{F}}{a} \cdot \frac{\alpha}{l}\right)^2} \cdot \frac{1+\varrho}{1+\frac{a_1}{a}\varrho} \cdot \frac{D}{2K_{xy}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \cdot \frac{B_{xy}}{K_{xy}}}, \quad (4.2)$$

und für die effektive Exzentrizität der Rippen

$$e_x^* = e_x - \frac{\varrho}{1+\varrho} \cdot \frac{\mathfrak{F}}{a} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 \cdot \frac{B_{xy}}{K_{xy}}}, \quad (4.3)$$

schließlich die „Plattengleichung“

$$\left(\frac{l}{\alpha}\right)^2 \cdot \frac{H}{B_x} M'' - M - e_x^* N = -\frac{pl^2}{\alpha^2}, \quad (4.4)$$

und die „Scheibengleichung“

$$\left(\frac{l}{\alpha}\right)^2 N'' - \frac{D_x}{C} N - e_x^* \cdot \frac{D_x}{B_x} \cdot \left(\frac{l}{\alpha}\right)^2 M'' = 0. \quad (4.5)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichungen setzt sich aus einer partikulären und einer homogenen Lösung zusammen. Für die praktisch vorkommenden Lastfälle läßt sich die partikuläre Lösung immer leicht angeben. Wir wollen uns im folgenden eingehender mit dem homogenen Fall, $p = 0$, beschäftigen. Dazu führen wir noch die Abkürzungen

$$\lambda^2 = \frac{B_x}{H}, \quad \beta^2 = \frac{D_x}{C} \cdot \frac{H}{B_x} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{e_x^*}{i_x}. \quad (4.6)$$

in die homogenen Differentialgleichungen (4.4) und (4.5) werden durch den Ansatz

$$M = A e^{\lambda \eta}, \quad Ni_x = B e^{\lambda \eta} \quad (10) \quad \left(\eta = \frac{\alpha x y}{l}\right)$$

in die algebraischen Gleichungen

$$\begin{aligned} A(\lambda^2 - 1) - B\varepsilon &= 0, \\ -A\lambda^2\varepsilon + B(\lambda^2 - \beta^2) &= 0 \end{aligned}$$

für A und B übergeführt. Aus der Verträglichkeitsbedingung für diese homogenen Gleichungen folgt die „charakteristische Gleichung“ für λ

$$\lambda^4 - (1 + \beta^2 + \varepsilon^2) \lambda^2 + \beta^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{(1 + \beta^2 + \varepsilon^2) \pm \sqrt{(1 - \beta^2 + \varepsilon^2)}} \right). \quad (4.8)$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1 + \beta^2 + \varepsilon^2, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \beta.$$

Aus (4.7) ergibt sich ferner

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{B_1}{A_1} = \frac{\varepsilon \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \beta^2} = \frac{\lambda_1^2 - 1}{\varepsilon}, \\ \frac{A_2}{B_2} &= \frac{\varepsilon}{\lambda_2^2 - 1} = \frac{\lambda_2^2 - \beta^2}{\varepsilon \lambda_2^2} = -\gamma. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Die N ist mit i_x multipliziert, damit B die gleiche Dimension wie A — nämlich eines Momentes — hat.

Wenn wir für die Argumente der e -Funktion die Abkürzungen

$$\eta_i = \frac{\alpha \lambda_i y}{l}, \quad \delta_i = \frac{\alpha \lambda_i d}{l} \quad (4.10)$$

einführen, läßt sich die vollständige homogene Lösung in der Form

$$\left. \begin{aligned} M &= A_1 e^{\eta_1} + B_1 e^{-\eta_1} - \gamma (A_2 e^{\eta_2} + B_2 e^{-\eta_2}) \\ Ni_x &= \gamma (A_1 e^{\eta_1} + B_1 e^{-\eta_1}) + A_2 e^{\eta_2} + B_2 e^{-\eta_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

schreiben. An Stelle der e -Funktion können auch die hyperbolischen Funktionen verwendet werden.

4.11 Plattenstreifen

Da die Lösung in Querrichtung schnell abklingt und die Plattenfelder in der Regel ein Seitenverhältnis $\frac{l}{L} < 1$ haben, können wir uns weiterhin auf den Plattenstreifen beschränken. Als erstes behandeln wir die Linienbelastung, Bild 18. Da die Platte im ganzen Bereich $0 < |y| \leq \infty$ unbelastet ist, genügt die homogene Lösung und davon der abklingende Teil:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{p \lambda l}{2\alpha} (B_1 e^{-\eta_1} - \gamma B_2 e^{-\eta_2}) \varphi'', \\ Ni_x &= \frac{p \lambda l}{2\alpha} (\gamma B_1 e^{-\eta_1} + B_2 e^{-\eta_2}) \varphi'' \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

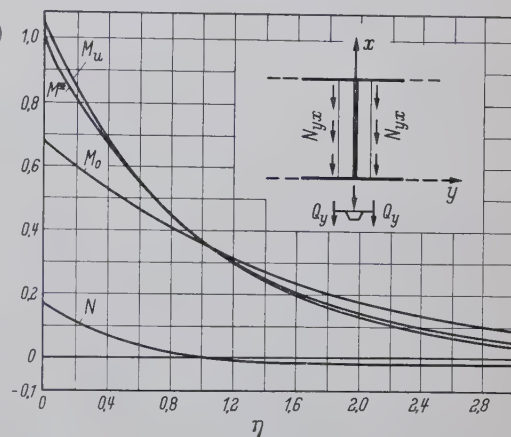


Bild 18. Einfluß der Exzentrizität

Zur Bestimmung der Konstanten B_1 und B_2 müssen wir die Übergangsbedingungen an der Laststelle $y = 0$ formulieren. Das Gleichgewicht am Plattenelement unter der Last fordert für die „Ersatzquerkraft“

$$Q_y + M'_{yx} = M'_{xy} + M'_{yx} = -\frac{p}{2}$$

und für die Schubkraft

$$N_{yx} = -\Phi' = 0;$$

wenn Φ'' auf der ganzen Linie $y = 0$ verschwindet, müssen auch die weiteren Ableitungen $\Phi''' = 0, \Phi^{(4)} = 0 \dots$ sein. Dann lauten nach Einführung der Elastizitätsbeziehungen (2.28) und (2.17) die Übergangsbedingungen ($\nu = 0$)

$$\frac{2B}{B_x} M' - B_{xy} \chi'' = -\frac{p}{2},$$

$$Gt(u_0'' + v_0'') - \frac{a_1}{\mathfrak{F}} B_{xy} \chi'' = 0.$$

Die letzte Gleichung können wir auf eine für die Rechnung geeignetere Form bringen, wenn wir das Glied v_0'' streichen, (das auf Grund der getroffenen Voraussetzungen identisch Null ist) und u_0' durch N ausdrücken (2.28), (2.4), (2.14)

$$D_x u_0'' = N' - e_x \cdot \frac{D_x}{B_x} M' = D_x \cdot \frac{a_1}{\mathfrak{F}} \cdot \frac{B_{xy}}{Gt} \chi'' = \frac{\varrho}{1+\varrho} \cdot \frac{\mathfrak{F}}{a} \cdot D_x \chi''.$$

Führen wir nun in diese Gleichungen den Ansatz (4.1) ein und eliminieren χ mit Hilfe von (2.27)

$$\chi'' - \frac{B_{xy}}{K_{xy}} \chi'''' = -\frac{M'}{B_x},$$

so erhalten wir schließlich mit den Abkürzungen (3.14), (4.3) und (4.6) die beiden Übergangsbedingungen

$$M^* = -\frac{p \kappa^2}{2},$$

$$N^* i_x = \varepsilon M^* = -\frac{\varepsilon p \kappa^2}{2},$$

die nach Einsetzen von (4.12)

$$B_1 \lambda_1 - \gamma B_2 \lambda_2 = 1,$$

$$\gamma B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2 = \varepsilon$$

lauten. Hieraus ergeben sich die Konstanten

$$B_1 = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{1 + \varepsilon \gamma}{1 + \gamma^2} = \frac{\lambda_1 (1 - \lambda_2^2)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}$$

$$\text{und} \quad B_2 = \frac{1}{\lambda_2} \cdot \frac{\varepsilon - \gamma}{1 + \gamma^2} = -\frac{\varepsilon \lambda_2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2},$$

und damit

$$M = \frac{p \kappa l}{2 \alpha (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left\{ \lambda_1 (1 - \lambda_2^2) e^{-\eta_1} + \lambda_2 (\lambda_1^2 - 1) e^{-\eta_2} \right\} \varphi''$$

$$\text{und} \quad N i_x = \frac{\varepsilon p \kappa l}{2 \alpha (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left\{ \lambda_1 e^{-\eta_1} - \lambda_2 e^{-\eta_2} \right\} \varphi'' \quad (4.13)$$

Die Schnittkräfte infolge einer Flächenlast (Bild 7b) erhalten wir aus den Gleichungen (4.13) durch Integration (siehe Abschnitt 3.121). Danach ergibt sich im Bereich der Last $|y| \leq d$

$$M = \int_0^{d-y} \dots dy + \int_0^{d+y} \dots dy$$

$$= M_0 - \frac{p l^2}{\alpha^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[(1 - \lambda_2^2) e^{-\delta_1} \cos \eta_1 + (\lambda_1^2 - 1) e^{-\delta_2} \cos \eta_2 \right] \varphi''$$

$$\text{und analog} \quad (4.14)$$

$$N i_x = -\frac{\varepsilon p l^2}{\alpha^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left(e^{-\delta_1} \cos \eta_1 - e^{-\delta_2} \cos \eta_2 \right) \varphi''.$$

Darin ist M_0 wieder das „Balkenmoment“. Im Bereiche $|y| > d$ wird

$$M = \int_{y-d}^{y+d} \dots dy = \frac{p l^2}{\alpha^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \times \left[(1 - \lambda_2^2) \sin \delta_1 e^{-\eta_1} + (\lambda_1^2 - 1) \sin \delta_2 e^{-\eta_2} \right] \varphi''$$

$$\text{und} \quad N i_x = \frac{\varepsilon p l^2}{\alpha^2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left(\sin \delta_1 e^{-\eta_1} - \sin \delta_2 e^{-\eta_2} \right) \varphi'' \quad (4.15)$$

Den Einfluß der Exzentrizität können wir am einfachsten am Beispiel einer Linienlast studieren. Bild 18 zeigt, wie dabei die Schnittkräfte und Spannungen in Querrichtung verlaufen, wenn die Steifen symmetrisch (M^*) und wenn sie exzentrisch angeordnet (M, N) sind. Wir sehen, daß in der Nähe der Last die Momente (und die Durchbiegungen) durch die Exzentrizität kleiner werden und daß sich bei den Spannungen nur im Obergurt ($M_{(o)} = \sigma_o W_o$) größere Abweichungen ergeben; die Untergurtspannungen ($M_{(u)} = \sigma_u W_u$) sind dagegen praktisch gleich. Denn bei der exzentrischen Platte tritt neben dem Biegemoment noch eine Normalkraft (in Lastnähe: Zugkraft) in den Längsrippen auf, es kommt also im Untergurt zu den kleineren Biegespannungen noch eine Spannung infolge Normalkraft hinzu, die gerade so groß ist, daß sich die Untergurtspannung gegenüber der Platte mit symmetrischen Steifen praktisch nicht ändert. Im Obergurt wird die Biege-Druckspannung durch die Zugspannung infolge der Normalkraft beträchtlich verringert.

Auch bei Flächenlasten, die für die Fahrbahnrechnung vor allem interessieren, können wir an Hand der Lösung für die Linienlast (Bild 18) den Einfluß der Exzentrizität diskutieren. Denn die Zustandslinien (Moment, Normalkraft) für einen Plattenstreifen mit Linienlast sind zugleich Einflußlinien, aus denen man durch Integration die Größen für eine Flächenbelastung erhält [vgl. Gleichungen (4.14) und (4.15)]. Das heißt wir finden die Korrekturen für die Exzentrizität aus Bild 18 durch Mittelwertbildung über dem Lastbereich $2d$. Wir sehen daraus, daß der Einfluß der Exzentrizität mit zunehmender Lasterstreckung d in y -Richtung abnimmt; die Lösung geht nämlich immer mehr in die Balkenlösung über wie bei der symmetrischen Platte. Hieraus erklärt sich auch, daß in größerer Entfernung von der Last die Momente und Obergurtspannungen für die „exzentrische“ Platte größer werden als bei der symmetrischen Platte, und die Normalkraft das Vorzeichen wechselt

(Bild 18). Denn es müssen die Integrale über den Momentenunterschied ΔM zwischen symmetrischer und exzentrischer Platte

$$- \int_0^\infty \Delta M(y) dy \quad \text{und über die Normalkraft} \quad - \int_0^\infty N(y) dy$$

verschwinden.

4.2 Elastische Querträger

Bisher hatten wir vorausgesetzt, daß die Querträger starr sind. Da bei den üblichen Plattenausführungen die Querträger aber nicht als starr angesehen werden können, müssen wir noch zeigen, wie sich die Nachgiebigkeit der Querträger bei einer „exzentrischen“ Platte auswirkt. Dazu behandeln wir als erstes die seitlich gelenkig gelagerte Platte. Wie bei einer symmetrischen Platte (Abschnitt 3.2) müssen wir die Schnittkräfte als Doppelreihe [vgl. Gleichung (3.35)]

$$M = \sum_m \sum_n M_{mn} \varphi''_{mn}(x) \sin \frac{n \pi y}{L},$$

$$N = \sum_m \sum_n N_{mn} \varphi''_{mn}(x) \sin \frac{n \pi y}{L} \quad (4.16)$$

ansetzen, damit wir die Gleichung (3.32) für die elastische Stützung am Querträger erfüllen können. Zur Bestimmung der Konstanten M_{mn} und N_{mn} benutzen wir zweckmäßig die Gleichungen (4.4) und (4.5), in denen schon die Funktionen φ eliminiert sind. Unter Benutzung der Abkürzungen (4.6) und (3.38) erhalten wir daraus die beiden Gleichungen

$$M_{mn} \left[1 + \left(\frac{n \pi l}{\alpha \kappa L} \right)_m^2 \right] + N_{mn} i_x \varepsilon = \frac{p_{mn} l^2}{\alpha_m^2}$$

$$- M_{mn} \varepsilon + N_{mn} i_x \left[1 + \left(\frac{\alpha \kappa \beta L}{n \pi l} \right)_m^2 \right] = 0$$

mit der Lösung

$$M_{mn} = \frac{p_{mn} l^2}{\alpha_m^2 \left[1 + \left(\frac{n \pi l}{\alpha \kappa L} \right)_m^2 + \frac{\varepsilon^2}{1 + \left(\frac{\alpha \kappa \beta L}{n \pi l} \right)_m^2} \right]},$$

$$N_{mn} i_x = M_{mn} \frac{\varepsilon}{1 + \left(\frac{\alpha \kappa \beta L}{n \pi l} \right)_m^2} \quad (4.17)$$

Wenn wir vom Moment das Trägerrostmoment M_0 (3.40), daß sich für jede Sinuswelle nach der Balkentheorie ermitteln läßt, abspalten, bleibt der Koeffizient

$$M_{mn,p} = -\frac{p_{mn} l^2}{\alpha_m^2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{n \pi l}{\alpha \kappa L} \right)_m^2 + \beta^2}{1 + \left(\frac{\alpha \kappa L}{n \pi l} \right)_m^2 + \frac{\varepsilon^2}{\left(\frac{n \pi l}{\alpha \kappa L} \right)_m^2 + \beta^2}}, \quad (4.18)$$

der den Einfluß der Torsionssteifigkeit und der Exzentrizität der Rippen wiedergibt, übrig. Infolge der Querträgerdurchsenkung verbiegt sich die Platte großwellig; die Torsionssteifigkeit und Exzentrizität der Rippen beeinflussen dabei die Plattenverformungen nur wenig. Die Koeffizienten $M_{mn,p}$ und $N_{mn} i_x$ sind daher kleine Korrekturen, die man meistens nur näherungsweise bestimmen braucht.

Da in den Längsrippen sowohl Biegemomente als auch Normalkräfte auftreten, benötigen wir zur Berechnung der Randspannungen

$$\sigma_u = \frac{M_{(u)}}{W_u}, \quad \sigma_o = \frac{M_{(o)}}{W_o}$$

die Kernpunktsmomente

$$M_{(u)} = M + N i_x \cdot \frac{W_u}{J_x} i_x = M + \frac{N i_x}{\varepsilon_u}, \quad M_{(o)} = M - \frac{N i_x}{\varepsilon_o}$$

mit

$$\varepsilon_u = \frac{J_x}{W_u i_x} = \frac{e_u}{i_x}, \quad \varepsilon_o = \frac{e_o}{i_x} \quad (4.19)$$

Hierfür erhält man die Beziehungen

$$M_{(u),(o)} \approx \sum_n \frac{M_{o,n}}{1 + \left(\frac{n \pi l}{\alpha_1 \kappa_1 L} \right)^2} \left[1 - \frac{\varepsilon}{1 + \left(\frac{\alpha_1 \kappa_1 \beta L}{n \pi l} \right)^2} \left(\varepsilon \mp \frac{1}{\varepsilon_{u,o}} \right) \right] \quad (4.20)$$

wenn man die gleichen Überlegungen anstellt, die zu der Gleichung (3.42) geführt haben, und wenn man Größen vernachlässigt, die bei den üblichen Fahrbahnausführungen sehr klein sind. Wie bei

er Platte mit starren Querträgern zeigt sich auch hier, daß die Untergurtspannungen für die exzentrische und symmetrische Platte praktisch gleich sind, denn $\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon_u}$ ist immer sehr klein. Die Gleichung (4.20) können wir auch für eine Platte mit durchlaufenden Querträgern verwenden, wir müssen lediglich $\frac{n\pi}{L}$ durch den allgemeinen Eigenwert k_n ersetzen.

Einfluß der Querschnittsverformungen der Hohlrippen

Bisher hatten wir vorausgesetzt, daß die Hohlrippen so weit aussteift sind, daß sich ihre Querschnittsgestalt nicht ändert. Um nun die Frage beantworten zu können, wieviel Schotte dazu notwendig sind, müssen wir untersuchen, wie sich die unausgesteifte Hohlrippe infolge der Querkraft \bar{Q}_y verformt. Die Rechnung wird für die üblichen Hohlrippen mit einfach symmetrischen Trapezquerschnitt (Bild 3) durchgeführt.

5.1 Die unausgesteifte Hohlrippe

Unter der Belastung durch die Querkraft \bar{Q}_y verformen sich die Kastenwandungen senkrecht und parallel zu ihrer Ebene, d. h. sie werden als Platte und Scheibe beansprucht. Die Ausbiegungen der Wandungen können wir näherungsweise nach der Balkentheorie ermitteln. Da die Wandungen ein großes Seitenverhältnis — Länge zu Breite — haben, kommt es praktisch zu keiner Plattenwirkung; jeder Streifen dx muß seine Last selbst abtragen (s. Abschnitt 2.43). Für die Berechnung der Verschiebungen in der Ebene fassen wir jede Wand — abgesehen vom Deckblech — als Balken auf. Da bei der Einleitung einer konzentrierten Last (z. B. Radlast) die Spannungen in der Platte von der Laststelle aus schnell abklingen, wird das Deckblech in Lastnähe durch die weniger belasteten Nachbaranteile daran gehindert, sich in seiner Ebene zu verformen. Es kann daher für die folgende Rechnung als starre Scheibe angesehen werden.

Das Deckblech muß die Querkraft \bar{Q}_y von einer Rippe zur anderen übertragen; dabei setzt es an den oberen Kastenecken die Querkraft $\bar{Q}_y a_4$ und das Ekmoment $\bar{Q}_y a_4$ (Bild 19a) ab. Unter der Einwirkung dieser Kräfte wird sich die Rippe verdrehen und auch ihre Querschnittsgestalt ändern. Um die Änderung der Querschnittsgestalt der Rippe bestimmen zu können, müssen wir die Belastung des Kastenquerschnittes (Bild 19a) umordnen, und zwar in eine Be-

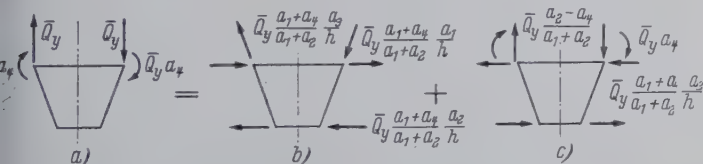


Bild 19. Belastung der Hohlrippen

lastung (Bild 19b), die einen konstant umlaufenden Schubfluß ergibt und eine reine Verdrehung zur Folge hat, und eine Gleichgewichtsgruppe (Bild 19c), die die Querschnittsverformungen verursacht. Nach der Torsionstheorie beträgt der umlaufende Schubfluß T infolge eines Torsionsmomentes M_T

$$T = \frac{M_T}{2\mathcal{G}} = \frac{M_T}{2h(a_1 + a_2)}$$

Die dabei auf die einzelnen Wandungen entfallenden resultierenden Kräfte sind in Bild 19b eingetragen. Ziehen wir diese Kräfte von den vorgegebenen ab, dann erhalten wir die Gleichgewichtsgruppe (Bild 19c), die keine resultierende Querkraft und kein resultierendes Moment hat. Infolge dieser Gleichgewichtsgruppe werden im Hohlrippenquerschnitt Ekmomente auftreten (Bild 4), die die Wandungen senkrecht zu ihrer Ebene verbiegen wollen, außerdem wollen die äußeren Kräfte und die zu den Ekmomenten gehörigen Querkräfte die Wandungen in ihrer Ebene verformen. Dabei werden sich die oberen Eckpunkte des Kastenquerschnittes wie in Bild 20 angegeben, um $2a_1\vartheta_1$ gegeneinander verschieben — ohne daß sich der Querschnitt dabei verdreht — und um den Winkel φ_1 drehen.

Die Querkraftverformung $\bar{\gamma}$ (2.7) — die angibt, um welches Maß sich die Profilenden gegeneinander verbiegen, ohne daß sich die Rippe verdreht — beträgt nach Bild 20, wenn man berücksichtigt,

daß sich die freien Enden des Deckblechs als Kragträger um $\frac{\bar{Q}_y a_4^3}{3B}$ durchbiegen,

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{a_1 + a_2} \left(\frac{\bar{Q}_y a_4^3}{3B} + a_1 \vartheta_1 + a_2 \varphi_1 \right).$$

Nach Elimination von φ_1 und Einführung der Abkürzung

$$\Delta_N = 3 + 4 \cdot \frac{a_2}{a_3} + 4 \cdot \frac{a_1}{a_3} \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^3 \left(1 + \frac{a_2}{a_3} \right) \dots \dots (5.1)$$

lautet diese Beziehung

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} &= \frac{\bar{Q}_y a_4^2}{3B} \left[1 - \frac{4a_1}{a a_3 \Delta_N} \cdot \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^3 \left(1 + \frac{a_2}{a_3} \right) \right] \\ &+ \vartheta_1 \left[1 - 2 \cdot \frac{(a_1 + a_2) a_1 a_4}{a a_2 a_3 \Delta_N} \cdot \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^3 \left(2 + \frac{a_1}{a_2} + 2 \frac{a_2}{a_3} \right) \right] \\ &= \frac{\bar{Q}_y}{K_{xy}} + \vartheta \dots \dots \dots (5.2) \end{aligned}$$

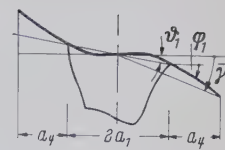


Bild 20. Verformung der Hohlrippen

Dabei rührt der erste Term $\frac{\bar{Q}_y}{K_{xy}}$ von der Ausbiegung des Flachblechs und der Rippenwandungen (senkrecht zu ihrer Ebene), der zweite Term von der gegenseitigen Verschiebung der Eckpunkte der Hohlrippe her.

Für ϑ , das bis auf einen Faktor gleich dem Wanddrehwinkel ϑ_1 ist, erhalten wir die Differentialgleichung

$$A \vartheta'''' + C \vartheta = \frac{\bar{Q}_y}{K_{xy}} \dots \dots \dots (5.3)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{3} (1 - \nu^2) \cdot \frac{a_2 + a_3}{a t_1^3} a_1^2 a_4^2 h^2 t_2 f, \quad \Delta_N \text{ [s. Gl. (5.1)]} \\ C &= 4 \cdot \frac{(a_1 + a_2)^2 a_1 a_4^3}{a a_2^3 a_3 \Delta_N} \left[1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2^2}{a_1 a_3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_1^2}{a_2 a_3} \cdot \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^3 \right] \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^3 f \\ K_{xy} &= \frac{3B}{a_4^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4a_1^2}{a a_3 \Delta_N} \cdot \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^3 \left(1 + \frac{a_2}{a_3} \right)} \\ f &= \frac{1 - \frac{4a_1^2}{a a_3 \Delta_N} \cdot \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^3 \left(1 + \frac{a_2}{a_3} \right)}{\left[1 - 2 \frac{(a_1 + a_2) a_1 a_4}{a a_2 a_3 \Delta_N} \cdot \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^3 \left(2 + \frac{a_1}{a_2} + 2 \frac{a_2}{a_3} \right) \right]^2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

die sich im Sonderfall $t_2^3 \ll t_1^3$, der bei den meisten Fahrbaunausführungen vorliegt, noch vereinfachen

$$\begin{aligned} A &= \frac{4}{3} (1 - \nu^2) \cdot \frac{a_2 + a_3}{a t_1^3} a_1^2 a_4^2 h^2 t_2, \\ K_{xy} &= \frac{3B}{a_4^2} \text{ [s. Gl. (2.20)]} \\ C &= 4 \cdot \frac{(a_1 + a_2)^2 a_1 a_4}{a a_2^3 a_3} \cdot \frac{1 + \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_2^2}{a_1 a_3}}{3 + 4 \frac{a_2}{a_3}} \cdot \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^3 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Abschließend wollen wir noch zeigen, wie sich die Hohlrippe verformt, wenn die Schottabstände klein werden. Die Differentialgleichung (5.3) ist bekannt als Gleichung des elastisch gebetteten Balkens. Bei der Herleitung dieser Gleichung haben wir die Wände als schubstarre Balken idealisiert. Bei kleinen Schottabständen — d. h., wenn das Verhältnis Schottabstand zu Wandhöhe klein ist — dürfen wir die Schubverformungen nicht mehr vernachlässigen. Es ist dann aber der Einfluß der „Bettung“ so klein, daß wir ihn vernachlässigen können. In diesem Falle lautet die Differentialgleichung für ϑ

$$A \vartheta'''' = \frac{\bar{Q}_y}{K_{xy}} - \frac{2}{3} (1 + \nu) \cdot \frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_2} a_2 a_3 \cdot \frac{\bar{Q}_y''}{K_{xy}} \dots \dots (5.6)$$

5.2 Einfluß der Querschnittsverformung auf die Torsionssteifigkeit der Platte

Um den Einfluß der Querschnittsverformung auf die Torsionssteifigkeit der Platte bestimmen zu können, müssen wir an Stelle

11) In der Originalarbeit ist die vollständige Herleitung dieser Gleichung angegeben.

der Gleichung (2.21) die eben gefundenen Beziehungen bei der Aufstellung der Plattengleichungen benutzen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf den Sonderfall $e_x = 0$. Die Gleichung (2.7) für die Verdrehung der Hohlrippen lautet mit (5.2)

$$\chi = w' - \bar{\gamma} = w' - \vartheta - \frac{\bar{Q}_y}{K_{xy}}, \quad (5.7)$$

außerdem benötigen wir auch die Gleichung (5.3) für ϑ . Hierin ersetzen wir \bar{Q}_y nach Gleichung (2.18a) und (2.13) durch

$$\bar{Q}_y = \bar{M}'_{xy} = -B_{xy} \chi''$$

und w'' nach Gleichung (2.29) durch

$$w'' = -\frac{M'}{B_x},$$

und erhalten zusammen mit Gleichung (3.1) die drei Gleichungen für die „symmetrische“ Platte

$$M'' + \frac{2B}{B_x} M'' - B_{xy} \chi'' = -p$$

$$\chi'' - \frac{B_{xy}}{K_{xy}} \chi'' + \vartheta'' = -\frac{M'}{B_x}$$

$$A \vartheta'''' + C \vartheta'' + \frac{B_{xy}}{K_{xy}} \chi'' = 0.$$

Mit Hilfe des Ansatzes (3.10), den wir auch auf ϑ erweitern

$$\vartheta = \sum_m \vartheta_m(y) \varphi_m(x) \quad (5.8)$$

lassen sich diese partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche überführen:

$$-\left(\frac{\alpha_m}{l}\right)^2 M_m + \frac{2B}{B_x} M_m'' - B_{xy} \chi_m' = -p_m,$$

$$\chi_m \left[1 + \left(\frac{\alpha_m}{l}\right)^2 \cdot \frac{B_{xy}}{K_{xy}} \right] + \vartheta_m = -\frac{M_m}{B_{xy}},$$

$$\vartheta_m \left[\left(\frac{\alpha_m}{l}\right)^4 A + C \right] - \left(\frac{\alpha_m}{l}\right)^2 \cdot \frac{B_{xy}}{K_{xy}} \chi_m = 0.$$

Nach Elimination von χ und ϑ folgt hieraus die einfache „Plattengleichung“ [vgl. Gleichung (3.13)]

$$\left(\frac{l}{\alpha_m}\right)^2 \cdot \frac{H_m}{B_x} M_m'' - M_m = -\frac{p_m l^2}{\alpha_m^2} \quad (5.9)$$

und die effektive Torsionssteifigkeit

$$H_m = 2B + \frac{B_{xy}}{1 + \left(\frac{\alpha_m}{l}\right)^2 \cdot \frac{B_{xy}}{K_{xy}} \left[1 + \left(\frac{\alpha_m}{l}\right)^4 A + C \right]} \quad (5.10)$$

Darin wird der Einfluß der Querschnittsverformung durch das Glied

$$\frac{1}{\left(\frac{\alpha_m}{l}\right)^4 A + C} \quad (5.11)$$

wiedergegeben; er nimmt mit zunehmender Wellenzahl m schnell ab.

Bei der Herleitung der Gleichungen (5.9) und (5.10) haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die Rippen nur an den Querträgern ausgesteift sind und zwischen den Querträgern keine Schotte haben. Allein in diesem Falle dürfen wir ϑ in der Form (5.8) ansetzen. Schotte zwischen den Querträgern sind eine Inhomogenität, über die hinweg wir nicht verschmieren dürfen. Dennoch können wir an Hand der Gleichung (5.11) die Frage beantworten, wieviel Schotte zur Erhaltung der Querschnittsgestalt der Hohlrippen notwendig sind, in dem wir darin an Stelle der Stützweite l den Schott-

abstand e einsetzen und e so wählen, daß $\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{e}\right)^4 A + C} \approx 1$

wird. Bei kleinen Schottabständen macht sich die Schubverformung in den Rippenwandungen bemerkbar; dadurch wird im wesentlichen die Größe A verändert. Aus Gleichung (5.6) folgt mit dem φ -Ansatz

$$A^* = \frac{A}{1 + \frac{2}{3}(1 + \nu) \frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_2} a_2 a_3 \left(\frac{\alpha}{e}\right)^2} \quad (5.12)$$

Damit lautet das Kriterium für den Schottabstand e

$$\Omega = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{e}\right)^4 A^* + C} \rightarrow 0. \quad (5.13)$$

In den Abschnitten 3 und 4 sind die Lösungen angegeben für den Fall, daß die Querschnittsgestalt der Rippen erhalten bleibt ($\vartheta \equiv 0$).

Wir können diese Gleichungen auch für eine Platte, bei der diese Bedingung nicht erfüllt ist (deren Hohlrippen nur an den Querträgern ausgesteift sind), benutzen, wenn wir darin die Größe $\frac{1}{K_{xy}}$

durch $\frac{1}{K_{xy}} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{\alpha_m}{l}\right)^4 A + C} \right)$ ersetzen.

6. Zahlenbeispiel

Für eine Platte (Bild 1) mit einem Querträgerabstand $l = 3$ m und einem Hauptträgerabstand $L = 10$ m wollen wir die größten Längsrippen- und Querträgermomente (in Brückenachse) ermitteln, die unter der Belastung durch den 60-t-Schwerlastwagen nach DIN 1072 entstehen. In Bild 21 sind die entsprechenden Laststellungen angegeben, und zwar für das größte Feldmoment (Bild 21a), für das größte negative Stützmoment (Bild 21b) und

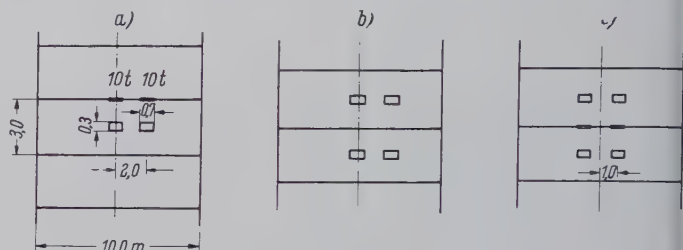


Bild 21. Lastfälle

für das größte Querträgermoment (Bild 21c). Die Momente werden berechnet für gelenkige Lagerung und für starre Einspannung an den Seitenrändern. Damit die Rechnung übersichtlich wird, vernachlässigen wir zunächst den Einfluß der Exzentrizität der Rippen und nehmen außerdem an, daß die Rippen durch Schotte genügend ausgesteift sind, so daß ihre Querschnittsgestalt bei der Verdrehung erhalten bleibt. Die dazu notwendige Anzahl der Schotte und die Änderung der Spannungen infolge der Exzentrizität der Rippen ermitteln wir anschließend.

6.1 Querschnittswerte

Nach Tafel 6 ergeben sich die Biegesteifigkeiten

$$B_x = \frac{E J_L}{2a} = \frac{2,1 \cdot 10^3 \cdot 2483}{50} = 10,43 \cdot 10^4 \text{ tcm},$$

$$B_y = \frac{E J_Q}{l} = \frac{2,1 \cdot 10^3 \cdot 2673}{3,0} = 187,0 \cdot 10^4 \text{ tcm},$$

$$B = \frac{E t^3}{12(1 - \nu^2)} = \frac{2,1 \cdot 10^3 \cdot 1,2^3}{12 \cdot 0,91} = 333 \text{ tcm},$$

die Torsionssteifigkeit

$$B_{xy} = \frac{2G \mathfrak{F}^2}{a \oint \frac{ds}{t}} = \frac{2 \cdot 2,1 \cdot 10^3 \cdot 16,2^2 \cdot 21,0^2}{2,6 \cdot 25 \cdot \left(\frac{48}{0,5} + \frac{30}{1,2}\right)} = 6,18 \cdot 10^4 \text{ tcm},$$

und der Verformungswiderstand des Deckblechs

$$K_{xy} l^2 = 3 B \cdot \left(\frac{l}{a_s}\right)^2 = 3 \cdot 333 \cdot \left(\frac{300}{10}\right)^2 = 90,0 \cdot 10^4 \text{ tcm}.$$

Daraus erhält man die Parameter

$$\sqrt{\frac{B_x}{B_{xy}}} = 1,3, \quad \frac{B_{xy}}{K_{xy} l^2} = 0,0687$$

und die Querträgerelastizitätszahl (gelenkige Lagerung)

$$\Phi = \frac{B_x}{B_y} \cdot \left(\frac{L}{n \pi l}\right)^4 = \frac{10,43}{187,0} \cdot \left(\frac{10}{n \pi 3}\right)^4 = \frac{0,0707}{n^4}.$$

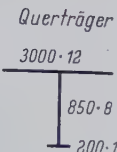
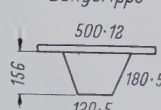
6.2 Längsrippenmomente („Symmetrische“ Platte)

Wir bestimmen die Momente zunächst für starre Querträger und anschließend die Korrektur, die die Elastizität der Querträger notwendig macht.

6.2.1 Starre Querträger

Zur Bestimmung der Momente in Brückenachse können wir die Platte als einen über den Querträgern durchlaufenden Plattenstreifen idealisieren, da der Einfluß der seitlichen Lagerung bis in Brückenachse völlig abgeklungen ist. Für den Lastfall „Achslast zwischen zwei Querträgern“ (Bild 21 a) ergibt sich nach den Gleichungen

Tafel 6. Querschnittswerte zum Zahlenbeispiel

		F	e	S	J	W _o	W _u
		cm ²	cm	cm ³	10 ² cm ⁴	cm ³	cm ³
	3000 · 12	360					
	850 · 8	68	43,1	2930	410		86,1
	200 · 10	20	86,1	1722	1263		10,4
					1483		e _u = 75,7
		448	10,38	4652	3156		3525
					483		
					2673		
	500 · 12	60			0,07		
	2 / 180 · 5	18	8,4	151	3,65		16,2
	120 · 5	6	16,2	97	12,70		2,95
					15,73	e _o = 2,95	e _u = 13,25
		84	2,95	248	32,15	842	187,3
					7,32		
					24,83		

ungen (3.20), (3.21) und (3.57) das Feldmoment

$$M_F = M_{F,o} - M_{F,p} = M_{F,o} - \frac{2Pl}{\alpha^2} \cdot \frac{\sin \gamma - \cos \frac{\alpha}{2}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha}} \times (e^{-\delta} - e^{-\epsilon} \sin \delta) \quad (6.1)$$

Das Balkenmoment M_0 hat nach Tafel 1 den Wert

$$M_{F,o} = 0,1707 Pl - \frac{Pc}{4} \left(1 - 0,423 \frac{c}{l}\right) = 0,1707 \cdot \frac{10 \cdot 3,0}{0,7} - \frac{10 \cdot 0,15}{0,7 \cdot 4} \left(1 - 0,423 \cdot \frac{0,15}{3}\right) = 7,32 - 0,52 = 6,80 \text{ tm/m}$$

Für den Anteil $M_{F,p}$, der den Einfluß der Plattenwirkung wieder gibt erhält man nach Tafel 7a

$$M_{F,p} = -2,00 \text{ tm/m}$$

Damit beträgt das Feldmoment (starre Querträger)

$$M_F^{(s)} = 6,80 - 2,00 = 4,80 \text{ tm/m}$$

Die Beziehung für das Stützmoment im Lastfall Bild 21b lautet nach Gleichung (3.20), (3.21) und (3.60)

$$M_s = M_{s,o} - M_{s,p} = M_{s,o} + \frac{2Pl}{\alpha^2} \cdot \frac{1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma} \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha \sin \alpha} \cdot \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\sin \gamma}{\gamma} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\alpha/2}\right)}{1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \left(\frac{\alpha \cos \alpha - \sin \alpha}{\alpha - \sin \alpha}\right)^2} \times (e^{-\delta} - e^{-\epsilon} \sin \delta) \quad (6.2)$$

Mit dem Balkenmoment $M_{s,o}$ (Tafel 1)

$$M_{s,o} = -2 \cdot 0,0793 Pl \left[1 - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{c}{l}\right)^2\right] = -6,78 \text{ tm/m}$$

und dem Plattenanteil (Tafel 7b) $M_{s,p} = 1,29 \text{ tm/m}$ ergibt sich der Zahlenwert (starre Querträger)

$$M_s^{(s)} = -6,78 + 1,29 = -5,49 \text{ tm/m}$$

6.22 Einfluß der Querträgerelastizität

Um die Korrekturen für die Querträgerelastizität ermitteln zu können, entwickeln wir die Belastung in Querrichtung nach den Eigenfunktionen ψ des schwingenden Balkens. Wir brauchen dabei nur die erste Welle zu berücksichtigen, weil die Querträger für die höheren Wellen praktisch starr sind.

6.221 Gelenkig gelagerte Querträger

Bei der seitlich gelenkig gelagerten Platte entwickeln wir in Querrichtung in eine Fourierreihe. Die Korrekturwerte finden wir, indem wir von der Lösung für elastische Querträger die für starre abziehen: $\Delta M = M^{(e)} - M^{(s)}$. Da der Einfluß der Torsionssteifigkeit sehr klein ist, kommen wir für jede Teillösung mit einer Näherung in der Form (3.42) aus. Mit den Trägerrostmomenten nach Tafel 1 und dem Lastkoeffizienten nach Tafel 3

$$P_n = \frac{2P}{L} \cdot \frac{\sin \bar{\delta}}{\bar{\delta}} (1 + \cos \bar{\epsilon})$$

erhalten wir dann für die beiden Korrekturen ΔM in Brückenachse die Beziehungen

Feld (Bild 21 a):

$$\Delta M_F = P_n l \left\{ \frac{1}{\beta'} \cdot \left(\frac{12 \Phi}{1 + \alpha' + \beta'} - \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{4} \right\} \times \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\pi l}{\alpha \times L} \right)^2 \right]_{el}} - \frac{0,25 - 0,0793}{\left[1 + \left(\frac{\pi l}{\alpha \times L} \right)^2 \right]_{st}} \quad (6.3)$$

Stütze (Bild 21b):

$$\Delta M_s = 2 P_n l \left\{ \frac{1}{\beta'} \cdot \left(\frac{4 \Phi}{1 + \alpha' + \beta'} - \frac{1}{8} \right) \times \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{\pi l}{\alpha \times L} \right)^2 \right]_{el}} + \frac{0,0793}{\left[1 + \left(\frac{\pi l}{\alpha \times L} \right)^2 \right]_{st}} \right\}$$

Dabei haben wir zur Vereinfachung die Lasterstreckung in Brückenlängsrichtung $c = 0$ gesetzt. Mit den Werten

$$\bar{\delta} = \frac{\pi d}{L} = 0,11, \quad \bar{\epsilon} = \frac{\pi e}{L} = 0,628,$$

$$\frac{2Pl}{L} \cdot \frac{\sin \bar{\delta}}{\bar{\delta}} (1 + \cos \bar{\epsilon}) = 10,83 \text{ tm/m}$$

$$\Phi = 0,0707, \quad \alpha' = \sqrt{\frac{1}{3}} + 16 \Phi = 1,210, \quad \beta' = \sqrt{\frac{4}{3}} + 2 \alpha' = 1,937$$

und den Eigenwerten

$$(\alpha)_{el} = \begin{matrix} 3,4 \\ 3,5 \end{matrix} \quad \text{und} \quad (\alpha)_{st} = \begin{matrix} 4,46 \\ 5,26 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(Feld)} \\ \text{(Stütze)} \end{matrix} \quad (12)$$

ergeben sich die Korrekturfaktoren für die Torsionssteifigkeit

$$1 + \left(\frac{\pi l}{\alpha \times L} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\pi l}{\alpha L} \right)^2 \cdot \frac{B_{xy}}{B_x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\alpha}{l} \right)^2 \cdot \frac{B_{xy}}{K_{xy}}} = \begin{matrix} 1,025 \\ = \text{elast.} \\ 1,023 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1,011 \\ \text{starr} \\ 1,007 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{(Feld)} \\ \\ \text{(Stütze)} \end{matrix}$$

und die Korrektur-Momente

$$\Delta M_F = 10,83 \cdot \left[\frac{1}{1,937} \cdot \left(\frac{0,848}{4,15} - 0,125 \right) \cdot \frac{1}{1,025} + \frac{0,0793}{1,011} \right] - 10,83 \cdot 0,25 \left(\frac{0,025}{1,025} - \frac{0,011}{1,011} \right) = 1,24 \text{ tm/m}$$

$$\Delta M_s = 1,08 \text{ tm/m}$$

6.222 Eingespannte Querträger

Nun wollen wir noch den Korrekturwert für das Feldmoment bestimmen, wenn die Platte seitlich eingespannt ist. Wir können dazu die im vorigen Abschnitt angegebene Beziehung für ΔM_F benutzen, müssen lediglich die Belastung nach den Eigenfunktionen des eingespannten Balkens entwickeln und $\frac{n\pi}{L}$ durch k_1 ersetzen. Der Belastungswert $P_n l \psi_n(0)$ für das Moment in Brückenachse beträgt nach Tafel 3

$$P_n l \psi_n(0) = \frac{Pl}{b} \cdot \left[\frac{\sin kd}{kd} (1 + \cos ke) - \frac{\cos kb}{\cos kb} \cdot \frac{\sin kd}{kd} (1 + \cos ke) \right] \left(1 - \frac{\cos kb}{\cos kb} \right)$$

¹²⁾ $(\alpha)_{el}$ erhält man aus Bild 14 für $\Phi = 0,0707$ und $(\alpha)_{st}$ für $\Phi = 0$.

oder in Zahlen mit dem Eigenwert $k_1 b = 2,365$ (Tafel 3)

$$P_1 l \psi_1(0) = \frac{10 \cdot 3,0}{5,0} \left(0,995 \cdot 1,585 + \frac{0,713}{5,37} 1,005 \cdot 2,482 \right) \\ \times \left(1 + \frac{0,713}{5,37} \right) = 12,97 \text{ tm/m.}$$

Wenn wir für den eingespannten Querträger die Steifigkeit $B_y = 90 \cdot 10^4 \text{ tcm}$ einsetzen, wird

$$\Phi = \frac{10,43}{90} \cdot \left(\frac{5,0}{2,365 \cdot 3,0} \right)^4 = 0,0286, \quad \alpha' = 0,890, \quad \beta' = 1,763.$$

Außerdem benötigen wir noch die Eigenwerte: $(\alpha)_{el} = 3,84$, $(\alpha)_{st} = 4,46$ (Bild 14) und den Faktor [s. Gleichung (3.50) u. (3.47)]

$$1 + \left(\frac{kl}{\alpha \pi} \right)^2 = 1 + \left(\frac{kl}{\alpha} \right)^2 \cdot \frac{B_{xy}}{B_x} \cdot \frac{1 - \frac{1}{kb}}{1 + \left(\frac{\alpha}{l} \right)^2 \cdot \frac{B_{xy}}{K_{xy}}} \quad \begin{matrix} 1,023 \text{ (elast.)} \\ 1,015 \text{ (starr).} \end{matrix}$$

Damit erhält man schließlich

$$\Delta M_F = 12,97 \left[\frac{1}{1,763} \left(\frac{0,343}{3,653} - 0,125 \right) \frac{1}{1,023} + \frac{0,0793}{1,015} - \frac{1}{4} \left(\frac{0,023}{1,023} - \frac{0,015}{1,015} \right) \right] = 0,75 \text{ tm/m.}$$

6.3 Einfluß der Exzentrizität

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, wie sich die Exzentrizität der Längsrippen auf das Feldmoment auswirkt. Dazu benötigen wir noch folgende Querschnittswerte (s. Abschnitt 6.1):

$$\varrho = \frac{a_1}{a_2 + a_3} \cdot \frac{t_2}{t_1} = \frac{15}{6 + 18} \cdot \frac{0,5}{1,2} = 0,260;$$

$$2 \cdot \frac{1 + \frac{a_4}{a} \varrho}{1 + \varrho} \cdot \frac{D_x}{D} = 2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{10}{25} 0,260 \right)}{1,260} \cdot \frac{84}{60} = 2,46$$

$$\frac{\varrho}{1 + \varrho} \cdot \frac{\tilde{\gamma}}{a} = \frac{0,260}{1,260} \cdot \frac{16,2 \cdot 21}{25} = 2,81 \text{ cm.}$$

$$e_x = 2,95 \text{ cm}, \quad i_x = \sqrt{\frac{2483}{84}} = 5,44 \text{ cm}$$

$$\left(\frac{\varrho}{1 + \varrho} \cdot \frac{\tilde{\gamma}}{a} \right)^2 \cdot \frac{D_x}{K_{xy} l^2} = 2,81^2 \cdot \frac{2,1 \cdot 10 \cdot 84}{90 \cdot 10 \cdot 50} = 0,031,$$

$$\varepsilon_u = \frac{e_u}{i_x} = \frac{13,25}{5,44} = 2,435,$$

$$\varepsilon_o = \frac{e_o}{i_x} = \frac{2,95}{5,44} = 0,543.$$

Von den Kernpunktsmomenten $M_{(o)}$ und $M_{(u)}$ (4.19), die für die Spannungsberechnung benötigt werden, brauchen wir nur die M_p -Werte

$$M_{(u),p} = M_p + \frac{N i_x}{\varepsilon_u} \quad \text{und} \quad M_{(o),p} = M_p - \frac{N i_x}{\varepsilon_o}$$

neu zu berechnen, da die Trägerrostmomente M_o sich durch die Exzentrizität der Rippen nicht ändern. Für eine Platte mit starren Querträgern betragen sie nach Tafel 7 c

$$M_{(u),p} = 2,069 - \frac{0,410}{2,435} = 1,90 \text{ tm/m},$$

$$M_{(o),p} = 2,069 + \frac{0,410}{0,543} = 2,82 \text{ tm/m}.$$

Für das Korrekturmoment ΔM_F infolge der Querträgerelastizität können wir von den Werten für die „symmetrische“ Platte (Abschnitt 6.221) ausgehen, müssen sie aber mit den Faktoren [s. Gleichung (4.20)]

$$\mu_{u,o} = 1 \cdot \frac{\varepsilon}{1 + \left(\frac{\alpha \pi \beta L}{\pi l} \right)^2} \left(\varepsilon \mp \frac{1}{\varepsilon_{u,o}} \right)$$

multiplizieren. Die Faktoren μ müssen für die Platte mit elastischen Querträgern

$$\alpha = 3,4, \quad \varepsilon = \frac{1}{5,44} \left(2,95 - \frac{2,81}{1,794} \right) = 0,254,$$

$$\beta^2 \approx \frac{2,46}{1,69 \cdot 1,794} = 0,811$$

und mit starren Querträgern

$$\alpha = 4,46, \quad \varepsilon = \frac{1}{5,44} \left(2,95 - \frac{2,81}{2,37} \right) = 0,324,$$

$$\beta^2 \approx \frac{2,46}{1,69 \cdot 2,37} = 0,615$$

bestimmt werden:

$$(\mu_u)_{el} = 1,001, \quad (\mu_u)_{st} = 1,000$$

$$(\mu_o)_{el} = 0,984, \quad (\mu_o)_{st} = 0,988$$

Mit den Werten aus Abschnitt 6.221 erhält man schließlich

$$\Delta M_{F,(u)} = 1,24 \text{ tm/m}$$

$$\Delta M_{F,(o)} = 1,22 \text{ tm/m}$$

6.4 Notwendige Anzahl der Schotte

In den vorlaufenden Rechnungen haben wir die Rippen als querschnittsgetreu angesehen. Wir wollen nun an Hand der Gleichung (5.13) die dazu notwendige Zahl der Schotte bestimmen.

Mit den Werten

$$a = 25 \text{ cm}, \quad a_1 = 15 \text{ cm}, \quad a_2 = 6 \text{ cm}, \quad a_3 = 18,7 \text{ cm}, \quad a_4 = 10 \text{ cm},$$

$$h = 16,2 \text{ cm}, \quad l = 300 \text{ cm}, \quad t = t_1 = 12 \text{ mm}, \quad t_2 = 5 \text{ mm} \quad \text{und} \quad \nu = 0,3$$

wird nach Gleichung (5.4)

$$K_{xy} = 1,042 \frac{3B}{a_4^2}, \quad \frac{A}{l^4} = 0,362 \cdot 10^{-3}, \quad C = 2,465.$$

Der Wert Ω , der ein Maß für den Einfluß der Querschnittsverformung ist, beträgt für die erste Eigenfunktion ($\alpha = 5,26$), wenn die Rippen nur an den Querträgern angesteift sind

$$\Omega = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{l} \right)^4 A + C} = \frac{1}{0,278 + 2,465} = 0,364,$$

und wenn zwei Zwischenschotte vorhanden sind ($e = \frac{l}{3}$)

$$\Omega = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{e} \right)^4 A^* + C} = \frac{1}{\frac{0,278 \cdot 81}{1,316} + 2,47} = 0,051.$$

Zwei Zwischenschotte genügen, da

$$\frac{1 - \Omega}{K_{xy}} = \frac{1,051}{1,042} \cdot \frac{a_4^2}{3B_1}$$

praktisch gleich dem Näherungswert $\frac{1}{K_{xy}} = \frac{a_4^2}{3B}$ ist, mit dem wir gerechnet haben (s. Abschnitt 6.1).

6.5 Querträgermomente

Die Querträgermomente bestimmen wir nur für die gelenkig gelagerte Platte; für eine eingespannte Platte ist der Rechnungsgang völlig analog. Da das Seitenverhältnis $\frac{l}{L} < 0,5$ ist, können wir zur Berechnung der Querträgermomente die ganze Fahrbahnplatte als eine orthotrope Platte auffassen (s. Abschnitt 3.13). Dafür erhält man die Querschnittswerte (s. Abschnitt 6.1)

$$B_x = 10,43 \cdot 10^4 \text{ tcm}, \quad B_y = 187,0 \cdot 10^4 \text{ tcm}.$$

Um die Torsionssteifigkeit nach Gleichung (3.23) bestimmen zu können, benötigen wir noch den zugehörigen Eigenwert α . Da der wesentliche Anteil des Querträgermomentes von der ersten Sinuswelle herrührt, nehmen wir den α -Wert, der sich für die Querträgerelastizitätszahl der ersten Sinuswelle ($\Phi = 0,0707$ — Abschnitt 6.1 nach Bild 14 ergibt: $\alpha = 3,5$. (Der gleiche Wert wird auch für die Berechnung der Längsrippenstützmomente benötigt — Abschnitt 6.221.) Damit wird

$$2H = \frac{B_{xy}}{1 + \left(\frac{\alpha}{l} \right)^2 \frac{B_{xy}}{K_{xy}}} = \frac{6,18 \cdot 10^4}{1,841} = 3,36 \cdot 10^4 \text{ tcm}.$$

Auf Grund dieser Querschnittswerte ergeben sich die Plattenparameter [4]

$$\beta = \sqrt{\frac{B_y}{B_x}} = 2,055,$$

$$\kappa = \frac{H}{\sqrt{B_x B_y}} = 0,038,$$

$$\kappa^* = \frac{\kappa}{\sqrt{1 - \kappa^2}} = 0,038,$$

$$q_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2} (1 \pm \kappa)} = \frac{0,720}{0,694}.$$

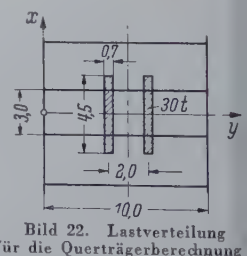


Bild 22. Lastverteilung für die Querträgerberechnung

Bei dieser Rechnung kann man, wie in [4] gezeigt ist, die Radlasten auf die Länge $2c = 4,5 \text{ m}$ verteilen (Bild 22). Für das Querträger-

Schnittkr.
Abschnitt

Fortsetzung von

Tafel 7: Berechnung der Längsrippen- und Querträgermomente

Schnittkr. Abschnitt

Rechentafeln

$$\frac{2 P l L}{\pi^2 c} = \frac{2 \cdot 30 \cdot 3 \cdot 10}{\pi^2 2,25} = 81,1 \text{ tm/m}, \quad \bar{\delta} = \frac{n \pi d}{L} = \frac{n \pi 0,35}{10} = 0,11 n, \quad \bar{\varepsilon}^* = \frac{n \pi e^*}{L} = \frac{n \pi 1,0}{10} = 0,314 n, \quad \bar{\gamma}_{1,2} = \frac{n \pi \beta \varphi_{1,2} c}{L} = \frac{1,046 n}{1,007 n}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
n	$\bar{\gamma}_1$	$e^{-\bar{\gamma}_1}$	$\bar{\gamma}_2$	$\cos \bar{\gamma}_2$	$\sin \bar{\gamma}_2$	(5) + $\varkappa^*(6)$	$\bar{\delta}$	$\frac{\sin \bar{\delta}}{\bar{\delta}}$
1 3	1,046 3,138	0,351 0,0434	1,007 3,021	0,534 −0,993	0,845 0,1203	0,567 −0,988	0,11 0,33	0,998 0,982

10	11	12	13
n	$\bar{\varepsilon}^*$	$\cos \bar{\varepsilon}^*$	$\frac{81,1}{n^2}$ (3) (7) (9) (12)
1 3	0,314 0,942	0,951 0,588	15,3 −0,2
			15,1

tinuität der Platte über den Querträgern von vornherein erfüllt wird. Außerdem ergibt sich ein einfacher Ausdruck für die Torsionssteifigkeit der Platte (3.14), in dem die eben erwähnten Querkraftverformungen erfaßt sind. Diese Querkraftverformungen bewirken, daß die Torsionssteifigkeit nicht mehr für alle Entwicklungsfunktionen gleich ist, sondern sich mit dem Eigenwert α ändert (und zwar mit größer werdendem α immer mehr abnimmt). Diese

Tafel 8: Zusammenstellung der Momente

		Längsrippe			Querträger	
		Feld		Stütze	Feld	
		symm. Platte	exzent. Platte		symm. Platte	Quertr. ver-schmiert
			$M_{(u)}$ $M_{(o)}$			
starre Quertr.	M_o	6,80	6,80	-6,78	88,04	80,0
	M_p	-2,00	-1,90	1,29	—	15,1
elast. Quertr.	ΔM_o	1,30	1,30	1,08	-21,20	
	ΔM_p	-0,06	-0,06	-0,08	-1,84	
Ergebnis		6,04	6,14	-4,41	65,0	64,9

moment gilt dann

$$M = M_o = M_p = M_o - \frac{2 P L}{(n \pi)^2 c} e^{-\bar{\gamma}_1} (\cos \bar{\gamma}_2 + \varkappa^* \sin \bar{\gamma}_2) \frac{\sin \bar{\delta}}{\bar{\delta}} \cos \bar{\varepsilon}$$

oder in Zahlen

$$M_o = \frac{P L}{2 c} (b - e) = \frac{30 \cdot 3,0}{4,5} 4,0 = 80 \text{ tm}$$

und

$$M_p = 15,1 \text{ t (Tafel 7 d).}$$

$$\text{d. h. } M = 80,0 - 15,1 = 64,9 \text{ tm.}$$

Dieser Wert stimmt praktisch mit dem genauen ($M = 65 \text{ tm}$ — Tafel 8) überein, dieser ergibt sich, wenn man — wie bei den Längsrippenmomenten — zuerst die Momente für starre Querträger und anschließend die Korrektur infolge der Querträgerelastizität berechnet.

7. Zusammenfassung

Zur Berechnung der Biegemomente in den Längsrippen werden Flachblech und Längsrippen zusammen als eine orthotrope Platte behandelt, die über den Quer- und Hauptträgern durchläuft. Dabei können wir das Glied $B w''''$ in der Plattengleichung, das von der Querkrümmung des Deckblechs herrührt, vernachlässigen, da die Biegesteifigkeit des Blechs wesentlich kleiner ist als die der Längsrippen. Dagegen müssen wir die Querkraft-Verbiegungen des Blechs zwischen den Rippen berücksichtigen, da hierdurch die effektive Torsionssteifigkeit der orthotropen Platte merklich vermindert wird.

Es ist zweckmäßig, die Rechnung zunächst für starre Querträger durchzuführen und anschließend erst die Korrektur infolge der Querträgerdurchsenkung zu ermitteln. Bei starrer Lagerung lassen sich die Längsrippenmomente — auch für die Durchlaufplatte — als Einfachreihe in x -Richtung angeben, wenn man als Entwicklungsfunktionen die Eigenfunktionen des Knickstabes verwendet. Hierdurch spart man die sonst notwendige statisch unbestimmte Rechnung für die Stützmomente, da durch diese Funktionen die Kon-

tinuität der Platte über den Querträgern von vornherein erfüllt wird. Außerdem ergibt sich ein einfacher Ausdruck für die Torsionssteifigkeit der Platte (3.14), in dem die eben erwähnten Querkraftverformungen erfaßt sind. Diese Querkraftverformungen bewirken, daß die Torsionssteifigkeit nicht mehr für alle Entwicklungsfunktionen gleich ist, sondern sich mit dem Eigenwert α ändert (und zwar mit größer werdendem α immer mehr abnimmt). Dieser Einfluß läßt sich klein halten, wenn man zu kleineren Rippenabständen und größeren Querträgerabständen übergeht. Da die Lösung in x -Richtung — der Haupttragrichtung der Plattenfelder — entwickelt wird, konvergieren die Reihen sehr gut. Man benötigt höchstens zwei Glieder, wenn man noch die Trägerrostmomente, die sich durch eine einfache Balkenrechnung bestimmen lassen, abspaltet. Für die Momente im Innern eines Feldes kann man die Plattenfelder als Streifen, für die Randmomente als Halbstreifen, die über den Querträgern durchlaufen, auffassen. Da die Querbiegesteifigkeit der Plattenfelder immer wesentlich kleiner ist als die beiden anderen Steifigkeiten, sind im „starren“ Fall die Längsrippenmomente für eine seitlich gelenkig gelagerte und für eine seitlich durchlaufende Platte praktisch gleich.

Aus der guten Konvergenz dieser Reihenentwicklung (nach den Eigenfunktionen des Knickstabes) folgt weiter, daß man auch bei der Hohlrippenplatte näherungsweise mit einer konstanten Torsionssteifigkeit, nämlich der Steifigkeit, die zu der ersten Entwicklungsfunktion φ_1 gehört, rechnen kann. Dadurch begeht man nur einen Fehler in den höheren Gliedern der Reihe ($m \geq 2$), die nur einen kleinen Einfluß auf das Ergebnis haben (s. Tafel 7 a, b); die Plattenmomente werden etwas zu klein. Dies Ergebnis ist sehr wichtig für Platten mit starkem Deckblech ($\sqrt{\frac{B}{B_x}} > 0,4$), bei denen das Bieeglied des Deckblechs nicht mehr vernachlässigt werden darf. Hierfür kann man den φ -Ansatz nicht mehr verwenden, sondern man muß zur Bestimmung der Stützmomente die statischen Größen als Reihe in Querrichtung ansetzen und wie in [4] vorgehen. Die Reihenentwicklungen in Querrichtung konvergieren aber meistens ziemlich schlecht.

Um den Einfluß der Querträgerelastizität zu erfassen, muß man die Momente als Doppelreihe ansetzen — in Querrichtung nach den Eigenfunktionen des schwingenden Balkens und in Längsrichtung wieder nach den Eigenfunktionen des Knickstabes. Von dieser Doppelreihe benötigen wir aber praktisch nur das erste Glied, da für die höheren Wellen in Querrichtung die Querträger „starr“ werden, und die Reihen in Längsrichtung gut konvergieren, wenn man wieder die Trägerrostmomente abspaltet. Diese Trägerrostmomente lassen sich auch bei elastischen Querträgern nach der Balkentheorie ermitteln, da der Trägerrost für eine Belastung in Form einer Eigenfunktion des schwingenden Balkens wie ein Balken wirkt. Der Einfluß der Torsionssteifigkeit ist bei den üblichen Plattenausführungen so klein (Tafel 8), daß man ihn in vielen Fällen vernachlässigen kann oder mit der Näherung (3.42), (3.50) — (Balkenstatik) auskommt.

Die vollständigen Gleichungen für die exzentrische Platte sind wegen ihrer hohen Ordnung (10) für die praktische Berechnung viel zu schwerfällig. Sie lassen sich aber für die üblichen Plattenausführungen vereinfachen, indem man das Bieeglied und das Dehnungsglied in Querrichtung vernachlässigt. Dadurch beschränkt man sich auf die wesentlichen Glieder und erhält einfache

Gleichungen, die man übersehen kann und die sich leicht lösen lassen. Die Exzentrizität der Längsrippen wirkt sich in folgender Weise aus: Die Durchbiegungen der Platte werden in Lastnähe kleiner, da durch den Schubfluß im exzentrischen Deckblech die Plattenwirkung vergrößert wird. Die Untergurtspannungen ändern sich praktisch nicht, so daß man ohne weiteres die Werte für die Platte mit symmetrisch angeordneten Längsrippen nehmen kann (Tafel 8). Dagegen werden die Obergurtspannungen bedeutend kleiner als im symmetrischen Fall, und zwar um so kleiner, je konzentrierter die Last ist (d. h. je kleiner die Lasterstreckung in Querrichtung gegenüber dem Querträgerabstand ist). Hieraus erklärt sich auch, daß die Exzentrizität auf die Korrekturmomente infolge der Querträgerelastizität nur einen geringen Einfluß hat; denn für diesen Anteil verformt sich die Platte in Querrichtung sehr großwellig (eine Welle über die ganze Querträgerstützweite), was einer großen Lastverteilung in Querrichtung entspricht.

Wenn die Hohlrippen nur an den Querträgern ausgesteift sind, kann sich im Felde die Querschnittsgestalt der Profile unter der Einwirkung der Querkraft Q_y ändern (Rechteck \rightarrow Rhombus). Im Abschnitt 5 sind die Gleichungen für diesen Fall abgeleitet und gelöst. Durch die Berücksichtigung der Querschnittsverformung wächst die Ordnung der Plattengleichung in x -Richtung noch einmal um vier. Durch den φ -Ansatz geht die partielle Plattengleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung in y -Richtung über. Die Erhöhung der Ordnung in x -Richtung bewirkt nur, daß der Ausdruck für die Torsionssteifigkeit etwas komplizierter wird [Gleichung (5.10) an Stelle von (3.14)], sonst ändert sich nichts. Die Berücksichtigung der Querschnittsverformung bereitet also überhaupt keine Schwierigkeiten. Bei einer Reihenentwicklung in y -Richtung erhält man aus der Plattengleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung in x -Richtung, deren Ordnung sich bei Berücksichtigung der Querschnittsverformung um vier erhöht, d. h. bei der „symmetrischen“ Platte auf die 10. Ordnung. Für diese Differentialgleichung müßte eine statisch unbestimmte Rechnung durchgeführt

werden, was sehr viel Schwierigkeiten bereitet. Hier zeigt sich besonders deutlich der Vorteil einer Entwicklung in Längsrichtung nach den Eigenfunktionen des Knickstabes, weil man — abgesehen von der weitaus besseren Konvergenz — für die symmetrische Platte immer nur eine Differentialgleichung zweiter Ordnung lösen muß und die statisch unbestimmte Lagerung durch die Eigenfunktionen selbst erfaßt wird.

Im Abschnitt 5 ist außerdem noch eine einfache Beziehung angegeben, mit deren Hilfe man ausrechnen kann, wieviel Schotte notwendig sind, damit die Hohlrippen bei der Verdrehung ihre Querschnittsgestalt nicht ändern.

Zur Berechnung der Querträgermomente kann man, wie schon in [4] gezeigt, bei Platten mit kleinen Seitenverhältnissen $\frac{l}{L}$ die ganze Fahrbahn als orthotrope Platte auffassen. Die zahlenmäßige Rechnung wird dadurch sehr vereinfacht (Tafel 7d). Bei größeren Seitenverhältnissen geht man genau so vor wie bei den Längsrippenmomenten.

Schrifttum

- [1] Sievers, Götz: Der Wiederaufbau der Straßenbrücke über den Rhein zwischen Duisburg-Ruhrort und Homberg. Stahlbau 25 (1956), H. 4, S. 81.
- [2] Pflüger, A.: Die orthotrope Platte mit Hohlsteinen. Österreichisches Ingenieur-Archiv 9 (1955), H. 2-3, S. 199/207.
- [3] Giencke, E.: Die Grundgleichungen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen. Stahlbau 24 (1955), H. 6, S. 128/129.
- [4] Giencke, E.: Die Berechnung von durchlaufenden Fahrbahnplatten. Stahlbau 27 (1958), H. 9, S. 229/237; H. 11, S. 291/298; H. 12, S. 326/332.
- [5] Anger, G.: Zehnteilige Einflußlinien für durchlaufende Träger, Bd. 3. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 19.

Berichtigung zum 1. Teil dieser Arbeit:

In den Formeln

2.18 a ist \bar{M}_{xy}' durch \bar{M}_{xy}' ,

2.29 B_y durch B_x
und Φ' durch Φ'' ,

2.32 und 3.1 M' durch M'' zu ersetzen.

Gerüstlose Auswechslung der Füllstäbe stählerner Fachwerkbrücken

Von Dipl.-Ing. Dr. techn. Karl Oberndorfer, VÖEST, Linz/Donau

DK 624.3 : 624.014.2

Wird aus einem innerlich und äußerlich statisch bestimmten Fachwerk ein Stab entfernt, so verliert das Tragwerk seine Stabilität. Es muß zur Erhaltung der Form eine zusätzliche äußere Lagerung vorgesehen werden. Bezogen auf eine Fachwerkbrücke bedeutet dies, daß bei Entfernung eines Stabes, z. B. einer Diagonale oder Vertikale, ein Joch anzuordnen ist, um die Brücke vor dem Einsturz zu bewahren.

Bei innerlich oder äußerlich statisch unbestimmten Konstruktionen muß die Entfernung eines Stabes nicht unbedingt zum Einsturz des Tragwerkes führen. Je nach Größe der Belastung und der inneren Unbestimmtheit oder Art der äußeren Unbestimmtheit können hierbei elastische oder plastische Verformungen auftreten, welche erst bei Erschöpfung der Tragfähigkeit eines oder mehrerer Stäbe das Versagen des Bauwerkes zur Folge haben.

Um bei einer Fachwerkbrücke einen Füllstab einwandfrei auszuwechseln zu können, muß am bezüglichen Ort eine Unterstützung oder ein Joch errichtet und das Fachwerk angehoben werden, damit die elastische Verformung aufgehoben und der auszubauende Stab spannungslos wird. Nur in diesem Zustand dürfen die Anschlüsse gelöst werden. Der auszubauende Stab wird im spannungslosen Zustand entfernt und der neue Stab ebenso eingebaut. Ein solcher Vorgang erfordert in der Praxis mitunter bedeutende Aufwendungen, da das Schlagen von Jochen in Flüssen und Strömen viel mehr Kosten verursacht als die eigentliche Auswechslung des Stabes. Es war daher naheliegend, einen Weg zu finden, der in wirtschaftlicher Weise gestattet, Füllstäbe von Fachwerken, welche durch Kriegshandlungen, Verkehrskarambolagen, mechanische oder chemische Beanspruchung beschädigt oder unbrauchbar wurden, zu erneuern. Stabauswechslungen aus den angeführten Gründen sind also im Brückenbau keine seltene Aufgabe. Es wurde daher eine Methode entwickelt, die besonders bei parallelgurtigen Fachwerkbrücken in wirtschaftlicher Weise angewendet und ausgeführt werden kann.

Bei Entnahme einer Diagonale müssen am Tragwerk solche konstruktiven Vorkehrungen getroffen werden, welche geeignet sind,

die Querkraftüberleitung zu gewährleisten. Dieser Forderung wird am besten durch Bandage des Obergurtes mit einem biegesteifen Träger entsprochen. Bei Annahme eines unendlich steifen Verstärkungsträgers würde eine starre Verbindung dieses Trägers mit dem Obergurt der Brücke genügen. In der Praxis ist aber der Verformung des Verstärkungsträgers Rechnung zu tragen: bei Entnahme einer Diagonalen wird der Verstärkungsträger auf Biegung beansprucht und im Ausmaß der Verformung des Verstärkungsträgers wird die Verformung des Fachwerkes folgen. Im verformten Zustand ist aber die spannungslose Auswechslung von Füllstäben nicht möglich. Die primäre Forderung muß daher auf eine Aufhebung der Verformung im Fachwerk gerichtet sein, während bei Erfüllung dieser Forderung Verformungen im Verstärkungsträger zugelassen werden können. Diesem Verlangen kann durch hydraulische Spannung des Verstärkungsträgers mit dem Brückenobergurt entsprochen werden. Durch Anspannen der hydraulischen Pressen wird der Verschiebung der Querschnitte bei n und $n+1$ des Fachwerkes entgegengewirkt und das Anspannen so lange fortgesetzt, bis die Diagonale spannungslos wird.

Die Anordnung der Spannrahmen richtet sich nach den Querkraften (Bild 1), und zwar gemäß

- a) bei positiver Querkraft,
- b) bei alternierender Querkraft (nur bei Verkehrslast) und
- c) bei negativer Querkraft.

Die Tendenz der Verformung dieses Verstärkungsträgers wird von der vorhandenen Querkraft bestimmt. Bild 2a zeigt die Verformung bei Vorhandensein einer positiven Querkraft, Bild 2b bei Vorhandensein einer negativen Querkraft.

An Hand einer tatsächlichen Ausführung soll nun die praktische Durchführung erläutert werden:

Eine über zwei Felder durchlaufende Straßenbrücke mit untenliegender Fahrbahn wurde um die Jahrhundertwende erbaut und

stand in ununterbrochener Benutzung. Als Brücke im Zuge einer städtischen Hauptverkehrsstraße mußte das Tragwerk für Autobusse und Lastkraftwagen befahrbar erhalten bleiben. Einem Neubau



a) Positive Querkraft



b) Alternierende Querkraft



c) Negative Querkraft

Bild 1. Anordnung der Spannrahmen

der Brücke konnte zur Zeit nicht nähergetreten werden, weil dieser der generellen Gesamtstadtplanung vorausgeeilt wäre. Es ergab sich daher die Notwendigkeit, zur Erzielung der verlangten Tragfähigkeit, die schadhaften Diagonalen teils zu verstärken oder dort zu erneuern, wo eine Verstärkung nicht mehr wirtschaftlich erschien. Zur Erfüllung dieser Aufgabe wäre es erforderlich gewesen, fast unter jedem Knoten Piloten zu schlagen oder Gerüste zu errichten, um die Brücke anzuheben und im spannungsfreien Zustand die Diagonalen oder Vertikalen auszuwechseln zu können. Zur Vermeidung dieser Aufwände wurde das oben aufgezeigte Verfahren entwickelt und kontinuierlich angewendet.

Auf dem Obergurt der Brücke wurde ein über drei Felder verlaufender Verstärkungsträger aufgelegt. Die Enden des Trägers wurden mit Spannrahmen mit dem Obergurt der Brücke verbunden und verkeilt oder mit hydraulischen Pressen geklemmt. Bild 3 zeigt derartige Spannrahmen, die den Obergurt der Brücke und den Verstärkungsträger umschließen. Nach der Montage der Spannrahmen wurden die hydraulischen Pressen zwischen Oberhaupt des Rahmens und Verstärkungsträger eingesetzt und angespannt (Bild 4). Am Ort jener



Bild 3. Anbringung der Spannrahmen an einer Fachwerkbrücke



Bild 4. Ansetzen der Pressen



a)

b)

Bild 2. Auftretende Verformungen bei a) positive Querkraft, b) negative Querkraft

Obergurtnoten, zu welchem die auszuwechselnde Diagonale läuft, wurden Doppelspannrahmen montiert und mittels hydraulischer Pressen, die zwischen Oberhaupt des Spannrahmens

und dem Verstärkungsträger eingesetzt waren, wurde die Durchbiegung des Verstärkungsträgers kompensiert und der spannungslose Ausbau der Diagonalen herbeigeführt. Praktisch läßt sich die Spannungsfreiheit einwandfrei ermitteln: Nach dem Anspannen der Pressen werden die Köpfe der Anschlußniete der auszubauenden Diagonalen abgebrannt. Bei weiterem Anspannen der Pressen ergibt sich ein Augenblick, bei welchem die Niete wegen Eintritt des spannungslosen Zustandes locker werden und mühelos herausgeschlagen werden können. Die schadhaften Stäbe wurden dann ausgebaut und die vorbereiteten neuen Stäbe in gleicher Weise eingesetzt und anschließend abgenietet.

Verschiedenes

Aluminium-Dachkonstruktion für das Empfangsgebäude des Brüsseler Flughafens¹⁾

Bei einer im Jahr 1958 durchgeführten Erweiterung und Modernisierung des Brüsseler Flughafens wurde ein großer Komplex von neuen Gebäuden errichtet. Das bedeutendste und größte dieser Gebäude stellt die Empfangshalle für die Fluggäste dar, das dadurch noch besonders bemerkenswert ist, daß nicht nur die Dachdeckung und der größte Teil der Fassade, sondern auch seine gesamte tragende Dachkonstruktion aus Aluminium bestehen.

Im Grundriß gesehen besteht die Dachkonstruktion der Halle aus vier voneinander unabhängigen, getrennten Abschnitten, zwischen denen sich ein spitzwinkliger, trapezförmiger Übergang befindet (Bild 1). Jeder der vier Dachabschnitte ist rd. 54 m lang und 21,24 oder 22,52 m breit. Jeder Abschnitt ist an seinen Längsseiten

¹⁾ Nach Sohier, A.: La charpente du hall de transit. Revue de l'Aluminium 36 (1959), H. 261, S. 91/100.

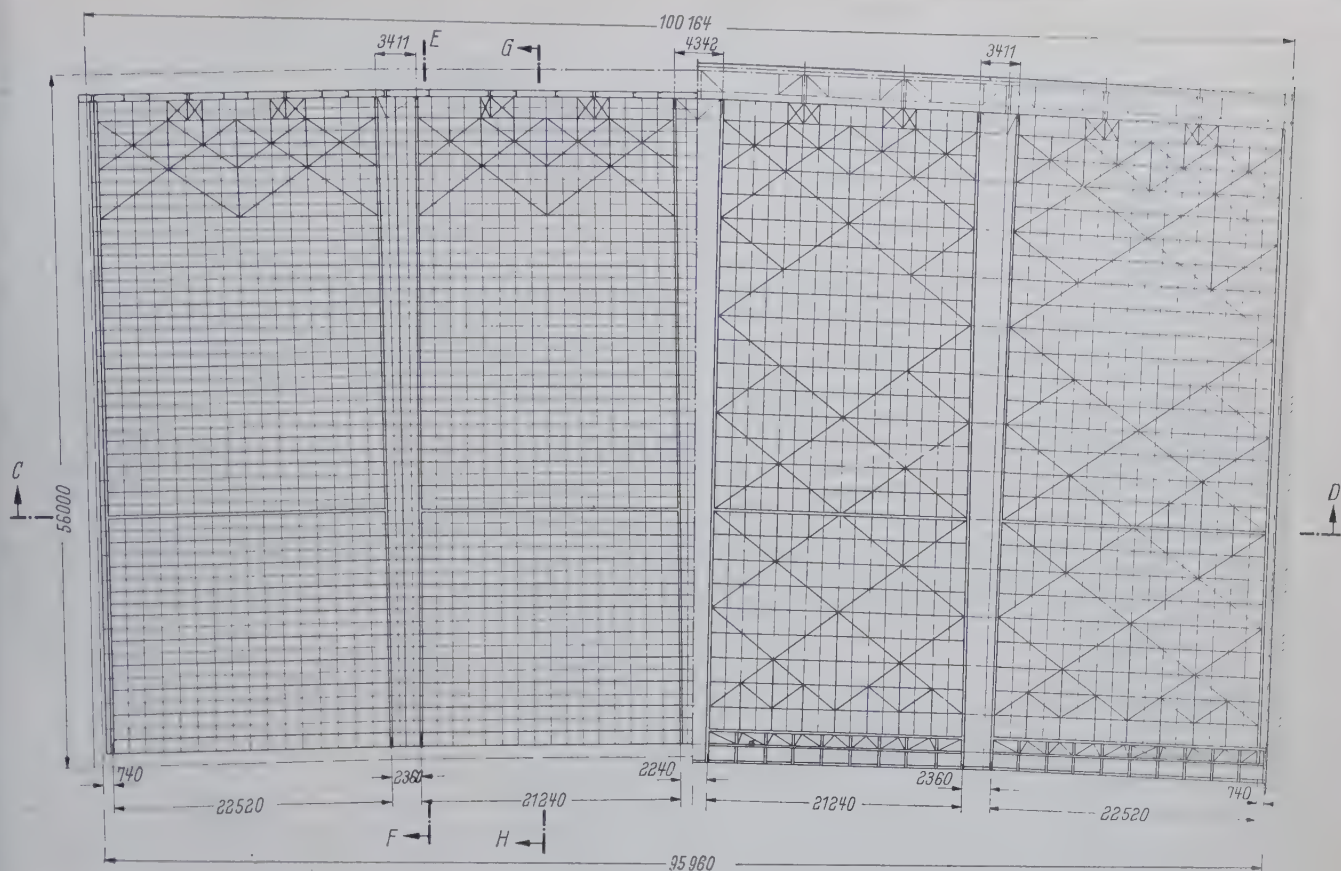


Bild 1. (Links) Draufsicht auf eine Hälfte der Dachkonstruktion der Halle. (Rechts) Schnitt durch eine Hälfte der Dachkonstruktion in halber Pfettenhöhe



Bild 2. Auflagerung von zwei Aluminiumdachbindern auf einer A-förmigen Stahlstütze mit Hilfe von zwei Kipplagern

von je zwei Fachwerkbindern aus Aluminium begrenzt, die als Kragbinder ausgebildet sind (Bild 2). Der nach der Rückseite der Halle gerichtete Kragarm der Binder ist 19 m lang, nach dem Flugplatz hin kragen die Binder 34 m weit aus. Die insgesamt 8 Fachwerkbinder weisen einen leicht geknickten Obergurt und einen parabelförmigen Untergurt auf (Bild 3). Über dem Auflager beträgt die Systemhöhe der Binder 5 m, an den beiden Enden beträgt sie nur je 1 m.

An den Enden der nach dem Flugfeld hin gerichteten Kragarme der Binder ist eine 100 m lange und 17 m hohe Aluminium-Glasfassade aufgehängt. Die Enden der 19 m langen, rückwärts gerichteten Kragarme der Binder werden durch Zugbänder aus Stahlrohr gehalten.

Die Ausfachung der Fachwerkbinder besteht aus nach dem Auflager hin steigenden Diagonalen, Pfosten und Hilfsdiagonalen (Bild 3 und 4). Die Fachwerkstäbe bestehen aus stranggepreßten Winkelprofilen mit und ohne Randwulsten. Die Untergurte weisen einen U-förmigen Querschnitt auf, der durch zwei aneinander-geschweißte L-Profile gebildet ist. Für die Werkstattverbindungen wurden kaltgeschlagene Aluminiumniete von 13 bis 22 mm Durchmesser verwendet. Für die Baustellenverbindungen benutzte man kadmierte Stahlschrauben, die vor dem Einziehen einen Zinkchromatüberzug erhielten. Nach dem Einziehen wurden die Schraubenköpfe und -mutter noch mit einem Bitumenanstrich versehen. Die beiden Binder eines jeden Dachabschnittes sind durch Fachwerkpfetten von 21,24 m oder 22,50 m Länge miteinander verbunden (Bild 5). Der Pfettenabstand beträgt 2,00 m. Entsprechend der veränderlichen Systemhöhe der beiden sie begrenzenden Binder weisen die parallelgurtigen Fachwerkpfetten auch eine unterschiedliche Höhe auf. Die Ausfachung der Pfetten hat die Form eines Andreaskreuzes. Die Gurte der Pfetten bestehen aus T-Profilen — mit Randwulsten — von 90 mm Höhe, 90 mm Breite und 4,5 mm Stegdicke. Die Diagonalen und Pfosten der Fachwerkpfetten bestehen aus Winkelprofilen mit und ohne Randwulsten. Die Pfetten sind vollständig geschweißt, wobei die Metall-Inert-Schweißung (S.I.G.M.A.-Verfahren) angewendet wurde. Innerhalb eines jeden Dachabschnittes ist zwischen den Pfetten noch eine zusätzliche Ausfachung angeordnet (vgl. Bild 4). Die Dachverbände bestehen ausschließlich aus einfachen Winkelprofilen und Wulstwinkeln.

Als Werkstoff für die Strangpreßprofile der Dachbinder, Pfetten und Verbände wurde die Aluminiumlegierung AlMgSi, warm ausgehärtet, gewählt. Das Gesamtgewicht der tragenden Aluminium-

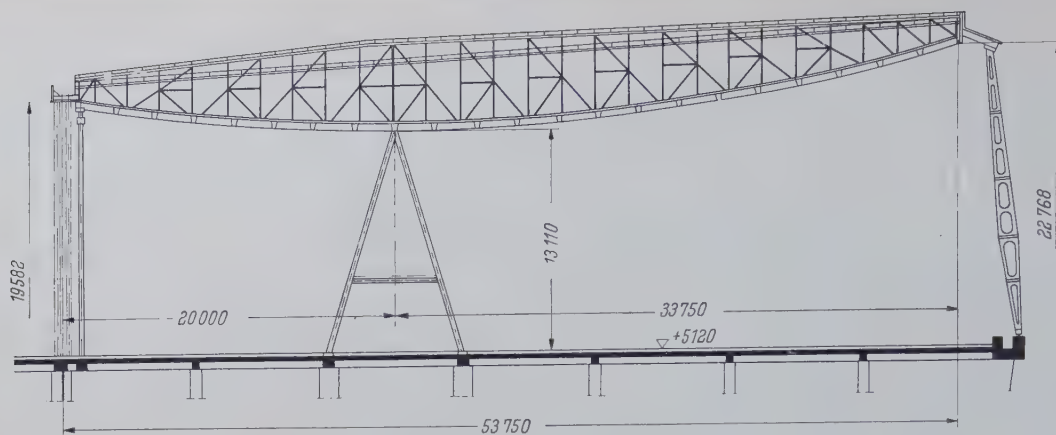


Bild 3. Schnitt E — F

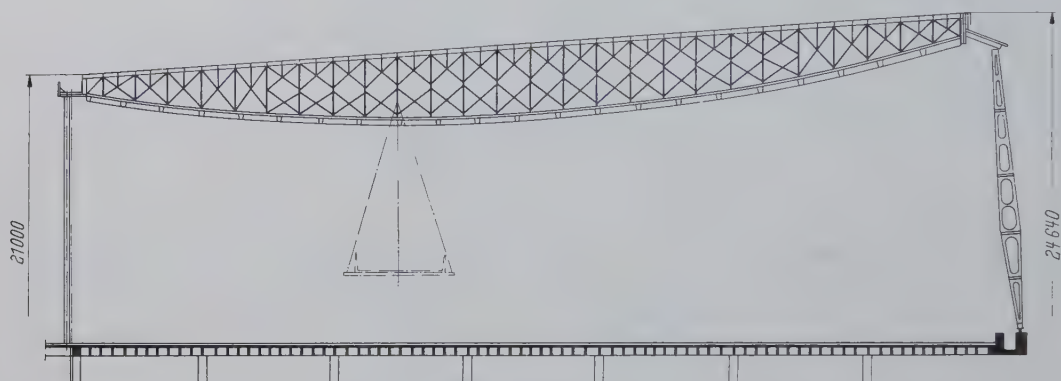


Bild 4. Schnitt G — H

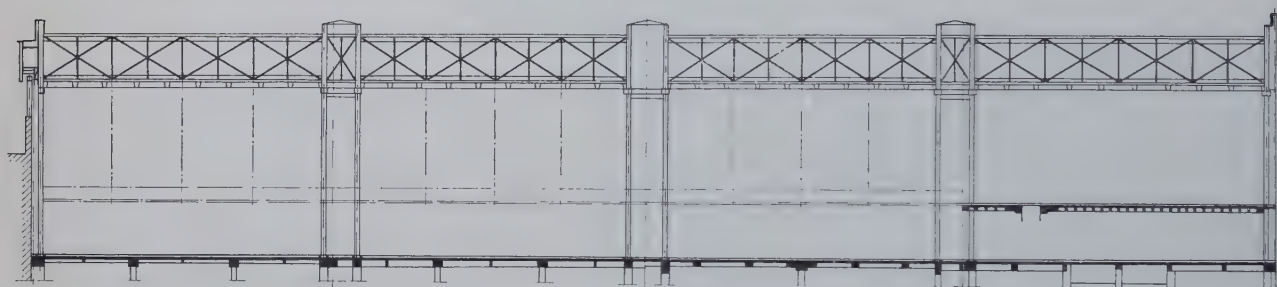


Bild 5. Schnitt C — D

dachkonstruktion beträgt 118 t. Das Gewicht eines Dachbinders von 54 m Länge beträgt 6500 kg. Eine geschweißte Fachwerkpfette von 22,50 m Länge wiegt im Durchschnitt 250 kg. Für die Berechnung der Dachkonstruktion wurde eine Schneelast von 35 kg/m² und eine Windlast von 40 kg/m² angenommen.

Die Binder wurden in Abschnitten von je 8 m Länge von der Werkstatt zur Baustelle transportiert und dort verschraubt. Jeder der vier am Boden vollständig zusammengebauten Dachabschnitte wurde von vier abgespannten Turmdrehkränen in einem Stück auf die stählernen Stützen gehoben. Wegen der guten Korrosionsbeständigkeit der verwendeten Aluminiumlegierung blieben sämtliche Bauteile ohne Schutzanstrich.

Für die Dachhaut und Decke der Halle wurden ebenfalls Aluminiumbleche verwendet. Die A-förmigen stählernen Stützen für die Binder sind vollständig mit anodisierten Aluminium-Strangpreßprofilen verkleidet. Quer durch die Halle führt ein Fußgängersteg aus Aluminiumprofilen, der mit Stahlrohren an der Aluminiumdachkonstruktion aufgehängt ist (vgl. Bild 4). Auch dieser Steg wurde in der Legierung AlMgSi ausgeführt. Das Gewicht des Steges beträgt insgesamt 30 t.

Die oben beschriebene Halle stellt die vierte Halle mit tragender Aluminiumdachkonstruktion dar, die im Jahre 1958 in Belgien errichtet wurde. Bei dem ersten Bauwerk dieser Art handelte es sich um eine Lagerhalle in Antwerpen mit Zweigelenkrahmenbindern von 80 m Stützweite. Die zweite Halle, das sog. „Palais des Transports“ auf der Weltausstellung Brüssel, wies

Aluminiumdachbinder von 70 m Stützweite auf. Auf der gleichen Ausstellung wurde schließlich der Pavillon der Sowjetunion errichtet, der ebenfalls Aluminiumdachbinder besaß.

Wie durch Vergleichsrechnungen festgestellt wurde, erwies sich die Ausführung der Dachkonstruktion in Aluminium bei allen Hallen mit Ausnahme des Pavillons der Sowjetunion als die wirtschaftlichste. Diese, bei dem im Vergleich zu Stahl höheren Werkstoffpreis des Aluminiums wohl bemerkenswerte Tatsache ist darauf zurückzuführen, daß bei zunehmender Spannweite das Eigengewicht eines Aluminiumtragwerks relativ in viel geringerem Maße ansteigt als bei einem stählernen Tragwerk. Dies wirkt sich für das Aluminium bei Dachkonstruktionen, die keine großen Nutzlasten zu tragen haben, besonders günstig aus. Bei der in Belgien herrschenden Preisrelation zwischen Aluminium und Stahl muß eine Dachkonstruktion fünfmal so leicht sein wie eine entsprechende Stahlkonstruktion, um mit letzterer preislich konkurrieren zu können. Bei der Lagerhalle in Antwerpen war die Aluminiumdachkonstruktion siebenmal so leicht, und bei dem Palais des Transports sechsmal so leicht wie eine vergleichbare Stahlkonstruktion. Im Vergleich zu diesen beiden Hallen ist die Dachkonstruktion des oben beschriebenen Empfangsgebäudes des Flughafens Brüssel-National relativ schwer ausgebildet. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die 35 m langen Kragarme der Binder die 17 m hohe Aluminium-Glasfassade der Halle tragen müssen. Da deshalb die Durchbiegung der Kragarme unter Schnee- und Windlast in besonders engen Grenzen gehalten werden mußte, wurden nicht nur schwerere Profile sondern auch eine relativ größere Systemhöhe als bei den anderen Hallen gewählt.

K. Domke

Die Olympia-Sporthalle in Squaw Valley¹⁾

Für die diesjährigen VIII. Olympischen Winterspiele in Squaw Valley, Californien, wurde mit einem Kostenaufwand von über 5 Mill. Dollar eine Sporthalle errichtet, die an drei Seiten 8000 Zuschauern Sitzplätze bietet und eine Eisfläche für Eiskunstlauf und Hockey-Spiele überdeckt. Die südliche Giebelseite ist offen und gibt einen Blick auf die Eisschnellauffläche und die gegenüberliegenden Berge frei (Bild 1 und 2).

Das Dach hat mit zwei voneinander getrennten Systemen eine Spannweite von 91,5 m und wird auf jeder Seite von acht Hauptauslegern getragen, die einen Abstand von 9,75 m haben und unter 3° geneigt sind. Die Dachhaut besteht aus Stahlzellenelementen mit einer Stützweite von 3,66 m. Als Pfetten werden I-Träger verwendet, die als einfache Träger bemessen auf dem Binder gesetzt sind.

Das statische System der Binder gleicht dem eines Trossen-Derricks: Der Ausleger ist an zwei Punkten mit Kabeln über den Mast gegen die Verankerung und den Rückausleger abgepannt, wobei die Kabel an der Mastspitze nicht über einen Sattel geführt, sondern einzeln angeschlossen sind (Bild 3). Die Höhe des geschweißten Kastenquerschnittes beträgt am Pylonfuß 1,07 m und verjüngt sich zum First auf 0,61 m. Die Profilbreite ist mit 0,61 m und die Stegblechdicke mit 13 mm über die Spannweite konstant. Die Gurtstärke beträgt am Pylon 5 mm und am First 22 mm. Der Kastenquerschnitt des 24,1 m ausladenden Rückauslegers hat Steg- und Gurtstärken von 13 mm und 16 mm und verjüngt sich zur Verankerung hin. Die 18,3 m hohen Pylone laufen ebenfalls von 1,07 m auf 0,61 m zur Spitze hin zu und sind in Form gekreuzter I-Träger aus Blechen geschweißt. Bei 16 mm Steg- und 22 mm Gurtstärke haben die Flansche eine Breite von 53 cm und 30 cm.

Für die Seilabspannung sind vorgereckte, verpannte Brücken cables mit 57 mm ϕ verwandt. Die spezifische Festigkeit beträgt 145 kg/mm², und unter Vollast tritt eine Beanspruchung von 22 kg/mm² auf. Jedes Kabelstück ist in genauer Länge hergestellt und hat keine Nachspannvorrichtung. Die leichte Montage der Konstruktion rechtfertigt diese hohen Anforderungen an die Genauigkeit der Werkstattfertigung.

Unter Eigengewicht haben die gegenüberliegenden Auslegerenden am First einen Abstand von 39 cm. Sie senken sich unter Vollast um 57 cm durch und haben dann Kontakt. Hierdurch wird die Größe der Seilzugkraft bei zeitweiser Lasterhöhung des Daches weitgehend eingeschränkt. Um bei einseitiger Belastung gleiche Durchbiegung im First zu verbürgen und um die Verformung infolge Windsog zu begrenzen, haben die Trägerenden eine Querkraftverbindung mit Anschlag (Bild 4). Ganz besondere Beachtung verdient der Firstabschluß der Dachhaut: Über ein System beweglicher Gelenkstäbe schließt die Firstkappe unter jeder Belastung wasserdicht ab.

Die große Weichheit des Tragsystems bedingt einen gelenkigen Anschluß des Auslegers an den Pylonfuß.

Die Unterseite der Dacheindeckung besteht aus einem ebenen Blech, das mit seiner Hebenwirkung auch zur Übertragung der

seitlichen Wind- und Erdbebenkräfte herangezogen ist. Die Stahlzellen liegen auf der Oberseite im Abstand von 15 cm und haben eine Höhe von 12 cm. Nach dem Verguß der Fugen mit einer Thiokol-Masse ist eine dünne Plastikhaut übergezogen. Nähere Angaben über die Konstruktion der Zellelemente werden in der Originalarbeit leider nicht gemacht.

Als Elemente einer eingebauten Schneeschmelzanlage sind die Stahlzellen des Daches in Traufenhöhe an eine umlaufende Warmluftleitung angeschlossen. Ebenso werden auch die Ausleger erwärmt, um die Bildung von Tropfwasser zu verhindern.

Durch den Einbau der Schneeschmelzanlage konnte die maßgebende Schneelast von 490 kg/m² auf 245 kg/m² herabgesetzt werden.

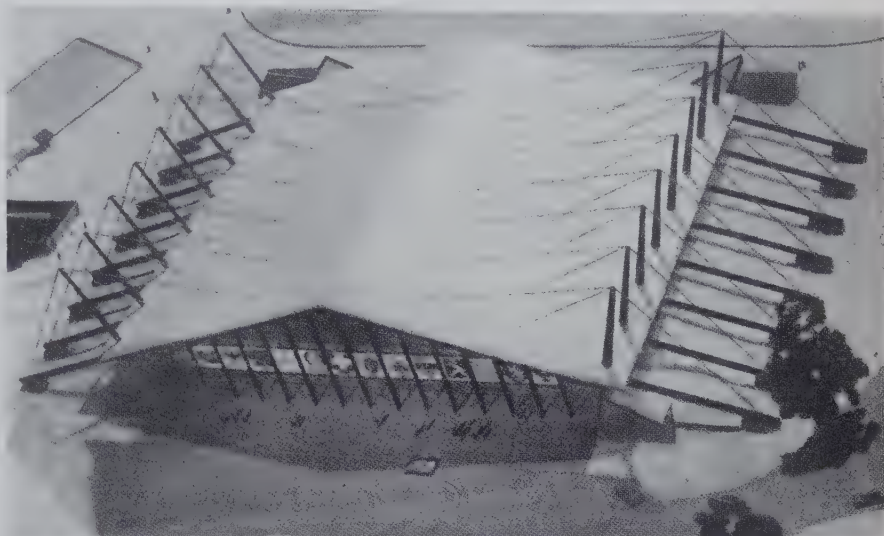


Bild 1. Modellansicht der Olympiahalle in Squaw Valley

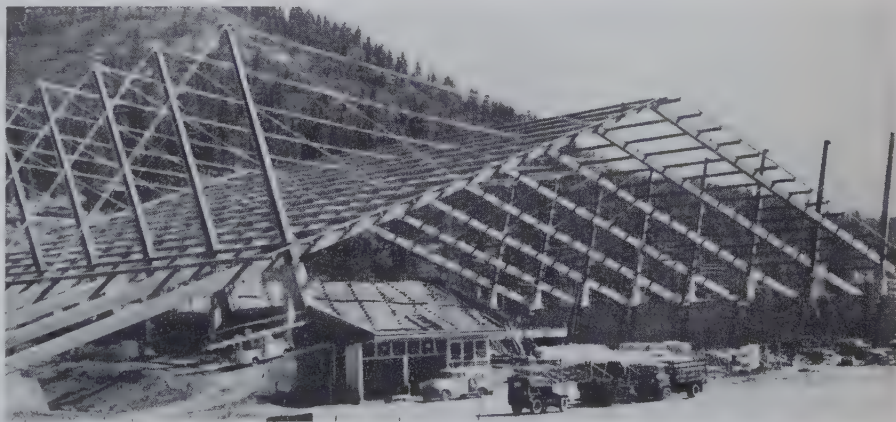


Bild 2. Die Konstruktion im Montagezustand

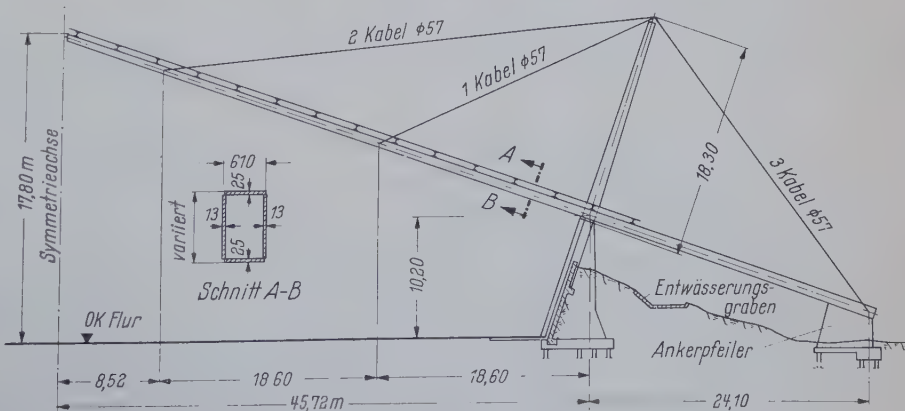


Bild 3. Querschnitt des Dachtragwerkes

¹⁾ Nach Clark, S. H.: Cable supported roof for Olympic Arena. Civil Engineering 29 (1959) H. 9, S. 46 (Abb. 1, p. 620) und Cable-Hung Olympic roof spans 300 feet. NR 163 (1599) July 30, S. 30.

den. Der Sicherheitsfaktor erlaubt allerdings bei Versagen der Schneeschmelzanlage eine zeitliche Lasterhöhung um 60 %.

Bei der Montage durch einen Raupenkran wurden zuerst die Rückausleger und die im Beton-Stützpfiler eingespannten Pylone erstellt, danach die Pylone durch die etwas gekürzten Rückhalte-

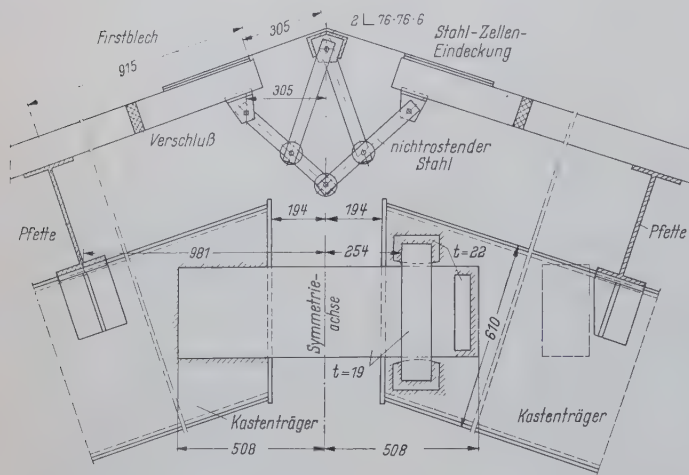


Bild 4. Gelenkkonstruktion für die Firstkappe und Auslegerenden am First mit Mechanismus zur Übertragung der Querkraft

seile vorgespannt. Die Ausleger wurden in zwei Teilstücken angeliefert und nach der Aufstellung biegefest miteinander verschweißt. Die Vorspannmomente in den Pylonen werden bei Vollast infolge Seildehnung vollständig abgebaut, und es ergibt sich dann eine reine Normkraftbeanspruchung.

Die nördliche Giebelseite ist oberhalb der Haupttribüne völlig verglast. Die Fensterposten legen sich gleitend gegen die Ausleger.

Das Gesamtgewicht der Stahlkonstruktion beträgt 1000 t, das Einheitsgewicht der überdeckten Fläche 110 kg/m². F. Platte

Hochschulnachricht

Herrn Baudirektor a. D. Dr.-Ing. Oskar Jüngling, Gustavsburg, wurde vom Hessischen Minister für Erziehung und Volksbildung ein Lehrauftrag in der Fakultät für Bauingenieurwesen an der Technischen Hochschule Darmstadt über „Praktischer Stahlwasserbau“ erteilt.

Persönliches

Professor Wilhelm Härter 80 Jahre

Professor Wilhelm Härter, einer der bedeutendsten Architekten auf dem Gebiete des Stahlbaues, feierte am 2. Januar 1960 in körperlicher und geistiger Frische die Vollendung seines 80. Lebensjahres. Über sein Lebenswerk wurde anlässlich seines 40jährigen Dienstjubiläums bei der M. A. N. in der Zeitschrift „Die Bautechnik“ 18 (1940) S. 114 ausführlich berichtet. Dem Jubilar gelten alle guten Wünsche der Fachwelt.

Bücherschau

Resinger, F.: Der dünnwandige Kastenträger. Heft 13 der Forschungshefte aus dem Gebiet des Stahlbaues. 73 Seiten mit 73 Bildern. Köln 1959. Stahlbauverlag GmbH. Kart. DM 19,50.

Angeregt durch die zunehmende Anwendung drillfester Brückentragwerke hat sich der Verfasser die Aufgabe gestellt, unter weitgehender Benutzung der Vorstellungen und Methoden der Träger-

lehre einen Beitrag zu deren Berechnung zu geben. Er betrachtet dabei die einzelnen, durch die elastisch verformbaren Querschotts abgeteilten Zellen des Kastenträgers als geschlossene Gelenkaltwerke. Die Untersuchungen beschränken sich auf prismatische Tragwerke mit rechteckigen, einfachsymmetrischen Kastenquerschnitten. Die Belastungen werden daher zweckmäßig in symmetrische Biege- und antisymmetrische Torsionslasten zerlegt, von denen die letzteren weiter betrachtet werden. Die Aufgabe läßt sich so auf die Behandlung von zwei nebeneinanderliegenden Biegeträgern mit ideellen Gurtquerschnitten zurückführen, so daß sich die Rechnung ohne gedankliche Umstellung zwanglos in die gewohnte Form der statischen Berechnung einfügt. Als statisch Unbekannte werden die an den Zellenenden wirkenden Wölbmomente gewählt. Damit ergeben sich fünfgliedrige Bedingungsgleichungen für ihre Berechnung. Abschließend werden mehrere Zahlenbeispiele durchgerechnet, aus denen die merkwürdigen Einflüsse der Zellenlängen und der Verformbarkeit der Querschotts zu erkennen sind. Der augenfällige Druckfehler in der zweiten Gleichung im Abschnitt 3.31 ist beim Studium nicht störend.

Es wäre zu wünschen, daß sich alle, die mit der Berechnung von Stahlbrücken zu tun haben, mit dem Inhalt des Heftes vertraut machen. Wansleben

Valentine, H. R.: Applied Hydrodynamics. Butterworths Scientific Publications London 1959, 50 S.

Dieses Buch bringt in englischer Sprache eine umfassende Darstellung der mathematischen Hilfsmittel zur Bearbeitung strömungstechnischer Aufgaben, wie Ausfluß aus Mündungen verschiedenster Form, Umströmungen von Profilen, Zylinder, Winkeln, usw. Der Verfasser, der Senior Lecturer in Civil Engineering an der University of New South Wales ist, hat auf Grund seiner großen Erfahrungen den Stoff besonders durch Zeichnungen und zahlenmäßige Berechnungen der Druckverteilungen dem Leser nahe gebracht. Das Buch ist von einem Praktiker geschrieben, der die Grenzen der mathematisch-theoretischen Strömungslehre kennt und sie dem Lernenden aufzeigt. Auf der anderen Seite stellt er in überzeugender Weise dar, welche zahlreichen und vielfältigen Strömungsvorgänge durch die mathematischen Hilfsmittel einwandfrei vorausberechnet werden können. Ein besonderes Kapitel ist den graphischen Methoden der Stromlinien- und Druckverteilungs-Ermittlung gewidmet. Ein weiteres Kapitel behandelt die dreidimensionale Strömung. Das Buch ist besonders dem theoretisch-mathematisch interessierten Studenten zu empfehlen. K. Petrikat

Kuntze, W.: Thermodynamik des Sprödbrechens und ihre Anwendung im Stahlbau. 2. Teil, Anwendungsprobleme der Thermodynamik von Anstrengung und Güte des Baustahles, insbesondere beim Schweißen. Bericht Nr. 20 a des Deutschen Ausschusses für Stahlbau. 20 S. und 9 Abb. Köln 1959. Stahlbau Verlags-GmbH. Kart. DM 6,—.

In dieser Ergänzung zum Hauptbericht [vgl. Stahlbau, 28 (1959), H. 7, S. 203] stellt sich der Verfasser die Aufgabe, mit Hilfe des thermodynamischen Gesetzes diejenigen Bedingungen einer Kritik zu unterziehen, unter denen sich die Gefahr der Eigenspannungen bei geschweißten Bauteilen umgehen läßt. Der Bericht gliedert sich in die Abschnitte „Regulierter Spannungsabbau bei nicht geschweißten Bauteilen“, „Durchbruchbedingung für einen im Schmelzfluß beim Schweißen entstehenden zäh-spröden Verbundkörper“ und „Regulierter mechanischer und thermischer Spannungsabbau bei nicht geschweißten Bauteilen“. Zusammenfassend kommt diese Untersuchung zum Schluß, „daß es nicht leicht ist, die Thesen der Thermodynamik von Anstrengung und Stahlgüte in die Praxis zu übertragen. Das Endergebnis führt zu einer Sicherheit und schließlich Einfachheit der Auswahl, wie sie mit bisherigen Methoden nicht erreicht wurden. Die eventuellen Unsicherheiten infolge wilder, nicht erfaßbarer Spannungen können durch einen thermodynamisch regulierten mechanischen Spannungsabbau und etwaigen nur an exponierten Stellen erforderlich werdenden thermischen Spannungsabbau kompensiert werden. Der Konstrukteur, welcher sich dieser Mittel sachgemäß bedient, kommt auf eine allen Ansprüchen gerecht werdende Standardstahlgüte, die — vom Erzeuger akzeptiert — die laufenden theoretischen Kontrollen der Sicherheit und damit das Problem einer Auswahl erübrigt. Die Definition dieser Güte, deren Klarheit allein den fortschrittlichen Erfolg ausmacht, kann nur mittels des in der Thermodynamik verankerten Prüfverfahrens vorgenommen werden.“ W. Späth

„Der Stahlbau“, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin-Wilmersdorf, Hohenzollerndamm 169, Ruf 87 15 56. — Schriftleitung: Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Kur Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule. Für den Anzeigenteil verantwortlich: Otto Swoboda, Bln.-Wilmersdorf. Anzeigentarif Nr. 5. Druck: O. Zach oHG., Berlin-W. Nachdruck, fotografische Vervielfältigungen, fotomechanische Wiedergabe von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus nur mit Genehmigung des Verlages. Warenbezeichnungen, Handelsnamen, Gebrauchsnamen, die in dieser Zeitschrift, auch ohne besondere Kennzeichen, veröffentlicht werden, sind nicht im Sinne der Markenschutz- und Warenzeichen-Gesetzgebung als frei zu betrachten. „Der Stahlbau“ darf ohne Zustimmung des Verlages nicht in Lesezirkeln geführt werden.

Rheinstahl Wanheim GmbH



Duisburg-Wanheim

Fernruf: Duisburg 719 51

Drahtwort: Wanwerk Duisburg

Fernschreiber: 0855861 wanwerk duisb

Aus unserem Erzeugungsprogramm:

Stahlhochbauten

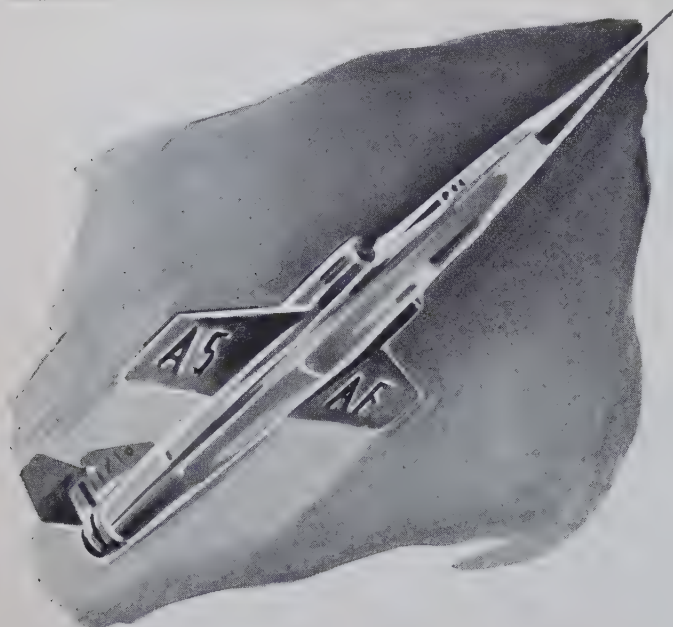
Stahlskelettbauten

Hallenbauten

Sämtliche Konstruktionen in genieteter oder geschweißter Ausführung

Eigenes Konstruktionsbüro · Planung – Projektierung – Ausführung

Wir verweisen auf den im gleichen Heft erscheinenden Aufsatz „Die Stahlkonstruktion für das SM-Stahlwerk I der August-Thyssen-Hütte AG“ von den Herren Dr.-Ing. Witt und Obering. Winken. Die technische Bearbeitung, Lieferung und Montage der Rampe und des Bunkergebäudes erfolgte durch unsere Firma.



Überall wo geschweisst wird...



Metallogen

der blaue Blitz

DIE **neue** SCHNELLFLUSS-ELEKTRODE

Metallogen

Gesellschaft für Schweißtechnik und Werkstoffschutz m. b. H., Wattenscheid i. W.



LORAIN[®]
DIE WELTMARKE

Autokräne von 10 bis 75 t Kapazität
Mobilkräne von 7 bis 75 t Kapazität
Raupenkräne von 6 bis 40 t Kapazität



Alle Maschinen werden
mit modernsten Zusat-
zgeräten und nach dem
neuesten Stand der
Technik geliefert.

Lassen Sie sich unverbindlich beraten vom General-Importeur für die Bundesrepublik
ERFASSUNGS- UND VERKAUFSGESELLSCHAFT M. B. H. & CO. K.G.
Giessen (Lahn) · Friedrichstraße 25 · Telefon 4651 · Telex 0482-866

WFM

AUS DER INDUSTRIE

(Ohne Verantwortung der Schriftleitung)

Schweißfachlehrgänge nach DVS-Richtlinien

Der Deutsche Verband für Schweißtechnik e. V. (DVS) weist auf die Anfangstermine folgender Lehrgänge im Jahre 1960 hin (T = Tages-, A = Abundlehrgang):

Schweißtechnische Lehr- und Versuchsanstalt	Schweißfachingenieur nach DIN 4100	Schweißfachmann nach DIN 4100
Duisburg, Bismarckstraße 85, Tel. 3 52 55/56	19. April 1960 T	—
Hamburg, Berliner Tor 21, Tel. 24 80 71/371	3. Okt. 1960 T 21. Nov. 1960 A	—
Hannover-Linden, Bauweg 1, Tel. 4 00 76	15. Febr. 1960 T 28. März 1960 T	28. März 1960 T
Mannheim, Windeckstraße 104/106, Tel. 4 61 20	Herbst 1960 T	—
München, Lazarettstraße 13, Tel. 6 57 25	15. Febr. 1960 T Auf Anfrage A	14. März 1960 A

Ferner Richtlinienlehrgänge für A- und E-Schweißer (je 220 Std. und Prüf.), Ausbildung und Prüfung für Stahlbauschweißer, Rohrschweißer, Kesselschweißer, Druckgefäßschweißer, Schiffbauschweißer, Kfz.-Schweißer, NE-Metallschweißer, Brennschneider, Lehrlinge, Schweißkonstruktion, Sonderausbildung, Schweißtechnische Beratung

Einzelheiten auf Anfrage durch die Lehranstalten und die DVS Hauptgeschäftsstelle, Düsseldorf, Tel. 2 74 44.

Einführungs- und Aufbaulehrgänge für Schweißer laufend auch in über 100 DVS-Kurstätten im gesamten Bundesgebiet.

Schweißer Ausbildung in der SLV Mannheim

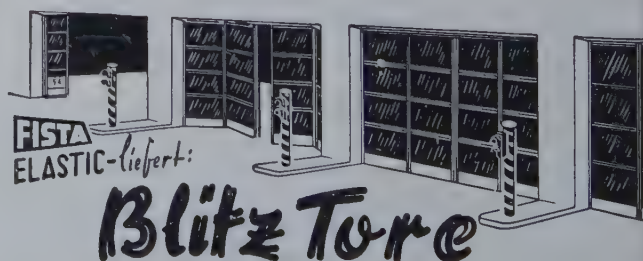
Die Schweißtechnische Lehr- und Versuchsanstalt Mannheim Windeckstraße 104—106, Telefon 4 11 71, führt in der nächsten Zeit zur Ausbildung von Autogen- und Lichtbogenschweißern, Lehrscheidern, Schweißfachmännern und Schweißfachingenieuren die nachstehend verzeichneten Lehrgänge durch:

Autogen- und Lichtbogenschweißer: (Tageslehrgang)	25. 4. bis 30. 5. 1960
Autogen- und Lichtbogenschweißer: (Abundlehrgang)	14. 3. bis 7. 10. 1960 (Lichtbogen belegt)
Autogen- und Lichtbogen-Lehrschweißer: Schweißfachmann-Lehrgang (Abundlehrgang)	7. 3. bis 25. 3. 1960 8. 2. bis 12. 4. 1960
Schweißfachingenieur-Lehrgang: (Tageslehrgang)	3. 10. bis 18. 11. 1960
Schutzgasschweißen: (Tageslehrgang)	22. 2. bis 4. 3. 1960
Sonderlehrgänge:	nach Vereinbarung.

Wir bitten um freundliche Beachtung der Beilage der Firma

Metallogen, Wattenscheid

In unserer Inlandauflage.



FISTA
ELASTIC-liefert:

Blitz Tore

ÖFFNEN u. SCHLIESSEN SICH VOLLAUTOMATISCH
MIT 2 SEC. LAUFZEITEN

FISTA-ELASTIC DÜSSELDORF 10 RUF 335833

Arbeitsgemeinschaft Martinswerk I

Hochtief — Brüggemann — Dyckerhoff & Widmann

Hitzbleck Duisburg-Hamborn

Beton- und Stahlbetonbau-Unternehmungen

Fenster und Fassaden

aus VLW-Aluminium
verkürzen die Bauzeit -
verleihen dem Bauobjekt
eine elegante und
beständig-bleibende
Oberfläche



2 (K) 8/57

VLW-ALUMINIUM

und Aluminium-Legierungen in allen

HALBZEUG - Formen

Wenden Sie sich bitte an unseren
Technischen Beratungsdienst,
der Ihnen für alle Fragen
zur Verfügung steht.

Verlangen Sie unsere ausführlichen
Druckschriften



VEREINIGTE LEICHTMETALL-WERKE GMBH · BONN

Werke in Bonn und Hannover · Fernruf: Bonn 31911 · Fernschreiber: 0886 837



Abdeckroste
stabil
trittsicher

STEINHAUS

GMBH · MÜLHEIM (RUHR) · SPELDORF

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN
Berlin-Wilmersdorf, Hohenzollerndamm 169

DER STAHLBAU

wird gebunden zu einem leicht übersichtlichen
Nachschlagewerk

Einbanddecken

für den Jahrgang 1958 und für frühere Jahr-
gänge lieferbar

Ganzleinen **DM 3,50** zuzügl. Porto

STELLENANGEBOTE

Wir suchen zum sofortigen Eintritt

jüngere

NACHWUCHS-INGENIEURE

für Stahlrohrkonstruktionen, Stahlwasserbauten
und verwandte Gebiete des Maschinenbaues.

Die Betreffenden werden von uns als Statiker
oder Konstrukteure ausgebildet und erhalten
einen geeigneten Arbeitsplatz.

Schriftliche Bewerbungen unter Beifügung von
Lebenslauf, Lichtbild, Zeugnisabschriften und
Gehaltsansprüchen erbeten an

MANNESMANN

AKTIENGESELLSCHAFT

RÖHRENWERK RATH

Düsseldorf-Rath, Rather Kreuzweg 106
Personalabteilung

Bedeutende Stahlbaufirma in Süddeutschland sucht

jüngere Diplom-Ingenieure

die mit dem modernen Berechnungsverfahren für
neuzeitlichen Stahlhoch- und Brückenbau bestens
vertraut sind, sowie

1 selbständigen Stahlbaukonstrukteur

mit mindestens fünfjähriger Praxis. Es wollen sich
nur Herren melden, welche an selbständiges und
flottes Arbeiten gewohnt sind.

Ausführliche Bewerbungen mit Lichtbild erbeten unter
Nr. 20 380 an DER STAHLBAU Anzeigenabteilung,
Berlin-Wilmersdorf, Hohenzollerndamm 169.

Prof. Dr.-Ing. Dr. techn. h. c. Konrad Sattler

Theorie der Verbundkonstruktionen

Spannbeton
Stahlträger in Verbund mit Beton

Zweite, neubearbeitete
und wesentlich erweiterte Auflage

Band 1: Theorie Band 2: Zahlenbeispiele

Großoktav, Band 1 und 2 zusammen XXIV, 521 Seiten,
mit 228 Bildern, 107 Tafeln und tabulierten Funktionen.

Geheftet DM 90,— Ganzleinen DM 98,—

Das Werk erschien in 2 Bänden.
Abgabe erfolgt nur geschlossen.

VERLAG VON
WILHELM ERNST & SOHN · BERLIN

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Wir suchen für unsere Abteilung „Hochbau“ einen

tüchtigen Statiker,

der in der Lage ist, die im Stahlhochbau vor-
kommenden Berechnungen selbständig durchzu-
führen.

Bewerbungen mit Lebenslauf, Lichtbild, Zeugnisab-
schriften, Gehaltsansprüchen, Eintrittstermin und An-
gaben über eventuellen Wohnungsbedarf sind zu
richten an

Dürrwerke Aktiengesellschaft, Ratingen



KRUPP

sucht

für die Abteilung Stahlhoch- und Brückenbau

Diplom-Ingenieur

mit guten statischen Kenntnissen.

Bewerbungen mit Lebenslauf, Lichtbild, Zeugnisabschriften, Gehaltswünschen und frühestem Eintrittstermin erbeten an:
Krupp-Schellhass GmbH, Bremen Neuenlander Straße 35

Stahlbaufirma im Rhein-Main-Gebiet

sucht

leitenden Ingenieur

mit umfangreichen Erfahrungen in Hochbaukonstruktionen aller Art, Blechapparaten und Schweißtechnik.

Bewerber nicht unter 30 Jahren bitten wir ausführliche Unterlagen einzureichen unter 20 384 an DER STAHLBAU Anzeigenabteilung, Berlin-Wilmersdorf, Hohenzollerndamm 169.



BUCKAU-WOLF

sucht zum baldigen Eintritt

jüngeren Statiker (TH bzw. HTL)

für die Berechnung von Stahlbauten des allgemeinen Stahlhochbaues und der Transportanlagen,

Stahlbau-Konstrukteure

für den Entwurf von Stahlbauten sowie die Anfertigung von Werkstattzeichnungen.

Jüngeren Bewerbern mit HTL-Abschluß wird die Möglichkeit der Einarbeitung gegeben.

Herren mit entsprechenden Erfahrungen werden um Einreichung ihrer Bewerbung mit handgeschriebenem Lebenslauf, Zeugnisabschriften, Lichtbild, Gehaltsansprüchen und um Angabe des frühesten Eintrittstermines gebeten.

MASCHINENFABRIK BUCKAU R. WOLF
AKTIENGESELLSCHAFT · GREVENBROICH/Ndrh.

Noch wirtschaftlicher
arbeiten

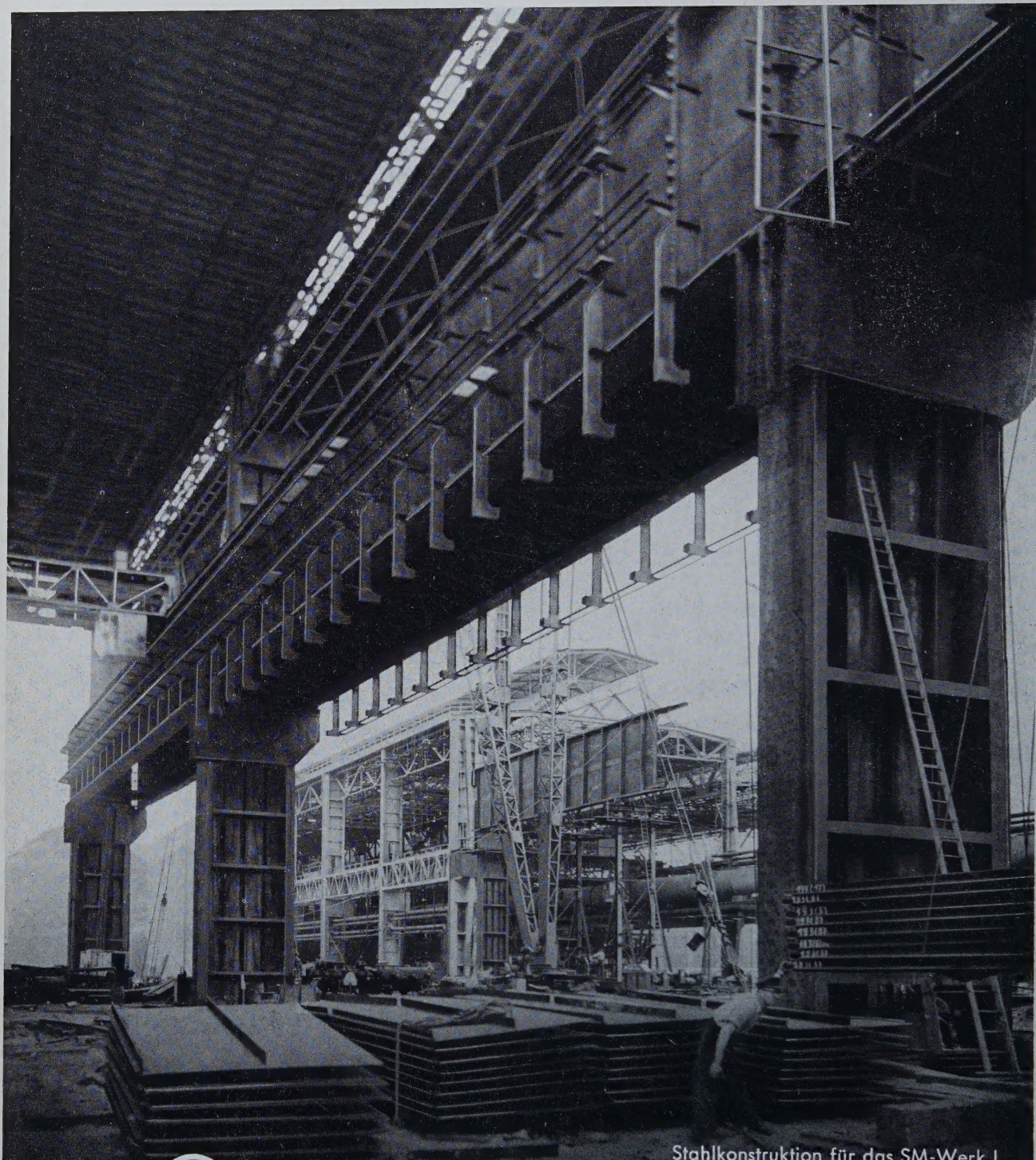
Ihre Schweißautomaten,

FLIESS
U-P-Schweißdraht



wenn Sie die neuartigen
Verbesserungen der
Fliess-Automaten-Schweiß-
drähte ausnutzen.

Wir bitten um Ihre Anfrage



RHEINSTAHL
UNION
BRÜCKENBAU AG.

Stahlkonstruktion für das SM-Werk I
der Aug. Thyssen-Hütte AG.

Ausführung in Arbeitsgemeinschaft
unter unserer Federführung

RHEINSTAHL UNION BRÜCKENBAU AG · DORTMUND · SUNDERWEG 86